7. Ulusal Matematik Olimpiyatı 1. Aşama Sınavı - 1999

1. Bir ABC üçgeninde $|AB| = 14$, $|BC| = 12$, $|AC| = 10$ ve D, $[AC]$ üstünde bir nokta olmak üzere, $|AD| = 4$ tür. E, $[BC]$ üstünde bir nokta ve $Alan(ABC) = 2 \cdot Alan(CDE)$ ise, $Alan(ABE)$ kaçtır?

   (A) $4\sqrt{6}$ **(B)** $6\sqrt{2}$ **(C)** $3\sqrt{6}$ **(D)** $4\sqrt{2}$ **(E)** $4\sqrt{5}$

   Çözüm:

   AE yi çizelim.

   $$[EDC] = 6S \Rightarrow [EDA] = 4S \Rightarrow [ABE] = 2S \Rightarrow [ABC] = 12S$$

   $\triangle ABC$ üçgeninin kenarları belli olduğu için üçgenin alanı $[ABC]$ bulunabilir. $\triangle ABC$ de Heron formülü (u Alan Formülü) uygularsak:

   $$\begin{aligned} [ABC] &= \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}, u = \frac{14+10+12}{2} = 18 \\ [ABC] &= \sqrt{18(18-14)(18-10)(18-12)} = 24\sqrt{6} \\ [ABE] &= \frac{[ABC]}{6} = 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

   Cevap: A

2. $xy = 4(y^2 + x)$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

   (A) 0 **(B)** 3 **(C)** 7 **(D)** 14 **(E)** Hiçbiri

   Çözüm:

   $$\begin{aligned} x(y-4) &= 4y^2 \\ x &= \frac{4y^2}{y-4} \\ &= \frac{4(y^2-16)+64}{y-4} \\ &= 4(y+4) + \frac{64}{y-4} \end{aligned}$$

   x in tam sayı olması için $(y-4)|64$ gerekir. 64 ün pozitif bölenleri sayısı $d(64 = 2^6) = 7$, tüm bölenleri sayısı da $7 \cdot 2 = 14$ tür. Bu durumda her y değeri için otomatik olarak x değeri belirleneceği için (x, y) ikililerinin sayısı 14 tür.

   Cevap: D

3. En fazla $3, 5, 7$ ve 8 top alabilen dört kutuya birbirinin aynı olan 19 top kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

   (A) 34 **(B)** 35 **(C)** 36 **(D)** 40 **(E)** Hiçbiri

   Çözüm:

   $$\begin{aligned} 3+5+7+8 &= 23 \\ 23-19 &= 4 \end{aligned}$$

   Bu sayılar da neyin nesi? Toplamda kutuların kapasitesi 23, yerleştirilecek topların sayısı 19. Kutuların dolu olduğunu varsayalım, bu durumda 4 kutudan 4 top çıkaracağız. Normalde bu işlem (tekrarlı kombinasyon)

   $$\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

farklı şekilde yapılır. Kapasitesi 3 olan kutudan 4 top çıkaramadığımız için $(4,0,0,0)$ dağıtımını iptal ediyoruz. Bu durumda $35-1=34$ farklı dağıtım elde edilir.

Cevap: A

4. $\dfrac{\sin^3 x}{\cos x}+\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}\geq k$ eşitsizliğini her $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ için sağlayan en büyük k değeri kaçtır?

(A) $\dfrac{1}{2}$ **(B)** $\dfrac{3}{4}$ **(C)** 1 **(D)** $\dfrac{3}{2}$ **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

$$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin x\cos x}=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-4\sin^2 x\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{2-\sin^2 2x}{\sin 2x}$$

$\sin 2x$ artarken; kesrin payı azalacak, paydası da artacak. Yani kesir küçülecek. Bu durumda kesir en küçük değerini $\sin 2x=1$ en büyükken alır. Bu durumda

$$\frac{2-\sin^2 2x}{\sin 2x}\geq\frac{2-1^2}{1}=1=k$$

olacaktır. Eşitlik $2x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$ iken sağlanır.

Cevap: C

5. ABC ikizkenar üçgeninde $|AB|=|AC|=10$ ve $|BC|=12$ dir. $[BC]$ üstünde $|BP|=|RC|=3$ olacak şekilde P ve R noktaları alınıyor. S ve T sırasıyla AB ve AC nin orta noktaları olmak üzere, PT ye S ve R den inilen dikme ayakları, M ve N ise, $|MN|$ kaçtır?

(A) $\dfrac{9\sqrt{13}}{26}$ **(B)** $\dfrac{12-2\sqrt{13}}{13}$ **(C)** $\dfrac{5\sqrt{13}+20}{13}$ **(D)** $15\sqrt{3}$ **(E)** $\dfrac{10\sqrt{13}}{13}$

Çözüm:

$[BC]$ nin orta noktası H olsun. $SP\parallel AH\parallel TR$ ve $ST\parallel BC$ olduğu için $PSTR$ bir dikdörtgendir. Pisagordan

$$SP=4, PR=6, PT=2\sqrt{13}$$

elde ederiz. Öklid'den elde ettiğimiz

$$MT\cdot PT=ST^2=36$$
$$NT\cdot PT=RT^2=16$$

ifadeleri taraf tarafa çıkartırsak

$$(MT-TN)PT=20\Rightarrow MN=\frac{10\sqrt{13}}{13}$$

bulunur.

Cevap: E

6. a,b,c tam sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned}x&\equiv a\pmod{14}\\x&\equiv b\pmod{15}\\x&\equiv c\pmod{16}\end{aligned}$$

denklik sistemini ve $0\leq x<2000$ koşulunu sağlayan x tam sayılarının sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

$(14,15,16)$ sayıları ikişerli olarak aralarında asal olsalardı tam bir Çinlilerin Kalan Teoremi sorusu diyecektik. Ama yine de tam bir Çinlilerin Kalan Teoremi sorusu.

Öncelikle a, c sayılarından biri tek, diğeri çift ise denklik sisteminin çözümünün olmadığını görmeye çalışalım.

$$a = b = c = 0 \Rightarrow 7 \cdot 15 \cdot 16 | x$$

şartını sağlayan $0 \leq x < 2000$ aralığında iki tane ($x = 0 \vee x = 1680$) tam sayı vardır.

$$a = 13, b = 14, c = 15 \Rightarrow 7 \cdot 15 \cdot 16 | (x + 1)$$

şartını sağlayan $0 \leq x < 2000$ aralığında tek bir tane $x = 1680 - 1 = 1679$ tam sayısı vardır.
Bu durumda denklik sisteminin çözüm kümesi $0, 1$ ya da 2 elemanlı olabilir. Denklik sisteminin çözüm kümesinin eleman sayısının 3 olamayacağını göstereceğiz.

$$x \equiv a \pmod{14} \Rightarrow x \equiv a \pmod{7}$$

gerektirmesini kullandığımızda

$$\begin{array}{rcl} x & \equiv & a \pmod{7} \\ x & \equiv & b \pmod{15} \\ x & \equiv & c \pmod{16} \end{array}$$

elde ederiz. Bu sistemin çözümleri, Çinlilerin Kalan Teoremine göre

$$x = 7 \cdot 15 \cdot 16 \cdot k + m = 1680k + m$$

formundadır. $0 \leq x < 2000$ aralığında çözüm kümesi 1 ya da 2 elemanlıdır. Bu durumda ikinci denklik sisteminin çözüm kümesi 3 elemanlı olamaz.

$$x \equiv a \pmod{14} \Rightarrow x \equiv a \pmod{7}$$

gerektirmesi çift yönlü olmadığı için ikinci denklik sisteminin bazı çözümleri birinci denklik sistemini sağlamaz. Bunun içindir ki birinci denklik sisteminin çözüm kümesi 0 elemanlı da olabilir.

Cevap: D

7. Üstlerinde $1, 1, 3, 4$ ve 5 yazılı altı kart bir torbaya konur. Torbadan rastgele, sırayla ve çekilenler geri konmaksızın üç kart çekilip, üstlerindeki rakamlardan çekiliş sırasına göre oluşturulan üç basamaklı sayının 3 e bölünme olasılığı kaçtır?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{3}{7}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

$(114), (135), (144), (345)$ sayıları 3 ile bölünür.
$(113), (115), (134), (145), (344), (445)$ sayıları da 3 ile bölünmez.
$1, 1, 4$ sayıları için

$$P_1 = \frac{3!}{2!} \frac{2}{6} \frac{1}{5} \frac{2}{4} = \frac{1}{10}$$

$1, 3, 5$ sayıları için

$$P_2 = 3! \frac{2}{6} \frac{1}{5} \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$1, 4, 4$ sayıları için

$$P_3 = \frac{3!}{2!} \frac{2}{6} \frac{1}{5} \frac{2}{4} = \frac{1}{10}$$

$3, 4, 5$ sayıları için

$$P_4 = 3! \frac{2}{6} \frac{1}{5} \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

ve

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

olur.

Cevap: B

8. $P(x)$ polinomu her x gerçel sayısı için $2P(x) = P(x+3) + P(x-3)$ koşulunu sağlıyorsa, P nin derecesi en çok kaç olabilir?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ P(x+3) &= a_n(x+3)^n + a_{n-1}(x+3)^{n-1} + \cdots + a_1(x+3) + a_0 \\ P(x-3) &= a_n(x-33)^n + a_{n-1}(x-3)^{n-1} + \cdots + a_1(x-3) + a_0 \end{aligned}$$

olsun. x^{n-2}'li terimin katsayısını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} P(x+3) &= \cdots + (a_n \cdot \tbinom{n}{2} \cdot 3^2 + a_{n-1} \cdot \tbinom{n-1}{1} \cdot 3 + a_{n-2})x^{n-2} + \ldots \\ P(x-3) &= \cdots + (a_n \cdot \tbinom{n}{2} \cdot 3^2 - a_{n-1} \cdot \tbinom{n-1}{1} \cdot 3 + a_{n-2})x^{n-2} + \ldots \\ P(x+3) + P(x-3) &= \cdots + (2a_n \cdot \tbinom{n}{2} \cdot 3^2 \cdot x^{n-2} + 2a_{n-2} \cdot x^{n-2}) + \ldots \\ 2P(x) &= \cdots + 2a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots \end{aligned}$$

Burada

$$2a_n \cdot \binom{n}{2} \cdot 3^2 \cdot x^{n-2} = 0$$

sonucu çıkar ki, bu da ancak $(n-2)$. terimin tanımlı olmamasıyla açıklanabilir. Yani $n - 2 < 0 \Rightarrow n \leq 1$ ile açıklanabilir.
$n = 1$ durumunda bariz şekilde $P(x) = x$ polinomu eşitliği sağladığı için P nin derecesi en çok 1 olabilir.

Cevap: B

9. Köşeleri bir çember üzerinde bulunan dışbükey bir sekizgenin dört kenarının uzunluğu 2, diğer dört kenarının uzunluğu da $6\sqrt{2}$ ise, bu sekizgenin alanı kaçtır?

(A) 120 **(B)** $24 + 68\sqrt{2}$ **(C)** $88\sqrt{2}$ **(D)** 124 **(E)** $72\sqrt{3}$

Çözüm:
Sekizgenin köşeleri çember üzerinde olduğu için her 2 uzunluğundaki kenar (kiriş), aynı α merkez açısı ile görülür. Benzer şekilde her $6\sqrt{2}$ lik kenar (kiriş) da β merkez açısı ile görülür. Buradan

$$4\alpha + 4\beta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

elde edilir. Sekizgende biri 2 diğeri de $6\sqrt{2}$ olan bir ardışık kenar ikilisini ele alalım. (Bu şekilde bir ikili vardır. Neden?) Genellemeyi bozmadan $AB = 2, BC = 6\sqrt{2}$ ve çemberin merkezi O olsun. $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$ olduğu için $\angle AOC = 90^\circ$, $AO = OC = R$ ve $\angle ABC = \dfrac{360^\circ - 90^\circ}{2} = 135^\circ$ elde edilir. Sekizgenin alanı

$$4[AOB] + 4[BOC] = 4[ABCO]$$

olacağı için, $[ABCO]$ değerini hesaplamaya çalışacağız. ABC üçgeninde Cosinüs teoreminden

$$AC^2 = 2^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \cos(135^\circ) = 4 + 72 + 24 = 100 \Rightarrow AC = \sqrt{100}$$

elde edilir. Sinüs teoreminden

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6\sqrt{2}\sin(135^\circ) = 6$$

ve $\triangle AOC$ ikizkenar dik üçgen olduğu için

$$[AOC] = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \frac{AC}{2} = \frac{AC^2}{4} = 25$$

dolayısıyla

$$[ABCO] = [ABC] + [AOC] = 25 + 6 = 31 \Rightarrow 4[ABCO] = 4 \cdot 31 = 124$$

elde edilir.

Cevap: D

10. En büyük ortak bölenleri n olan tüm a, b, c tam sayıları için

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= a \\ 2x+y-2z &= b \\ 3x+y+5z &= c \end{aligned}$$

denklem sisteminin x, y, z tam sayılar olmak üzere çözümünün bulunmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısı nedir?

(A) 7 **(B)** 14 **(C)** 28 **(D)** 56 **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

$$\begin{aligned} 2a-b &= 2x+4y+6z-2x-y+2z &&= 3y+8z \\ 3b-2c &= 6x+3y-6z-6x-2y-10z &&= y-16z \\ 2(2a-b)+(3b-2c) &= 2(3y+8z)+(y-16z) &&= 7y \\ 4a+b-2c &= 7y &&\Rightarrow y=\frac{4a+b-2c}{7} \end{aligned}$$

elde edilir. Bulduğumuz y değerini

$$3b-2c=y-16z$$

de yerine yazarsak

$$z=\frac{y+2c-3b}{16}=\frac{\frac{4a+b-2c}{7}+2c-3b}{16}=\frac{\frac{4a+b-2c+14c-21b}{7}}{16}=\frac{4a+12c-20b}{7\cdot 16}=\frac{a-5b+3c}{28}$$

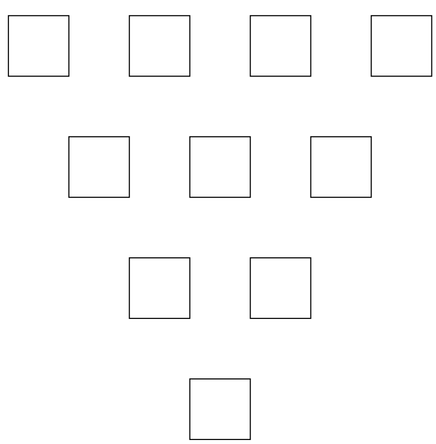
elde ederiz. x değeri için ise

$$\begin{aligned} 2x+y-2z &= b \\ x &= \frac{b-y+2z}{2} \\ &= \frac{b-\frac{4a+b-2c}{7}+2\cdot\frac{a-5b+3c}{28}}{2} \\ &= \frac{28b-4(4a+b-2c)+2(a-5b+3c)}{56} \\ &= \frac{-14a+14b+14c}{56} \\ &= \frac{-a+b+c}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. $4, 7, 28$ sayılarının en küçük ortak katı 28 dir. Bu durumda $(a, b, c) = n = 28$ olması durumunda x, y, z sayıları birer tam sayı olur.

Cevap: C

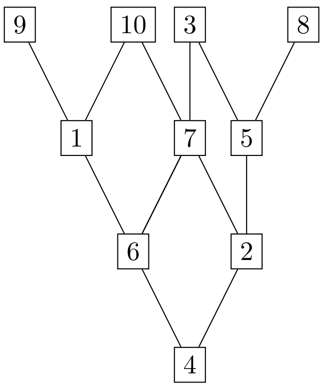
11. 1 den 10 a kadar olan tam sayılar, yandaki şekildeki on kutuya yerleştiriliyor. En üst sıradakiler dışında her kutudaki sayı, hemen üstündeki iki kutuda bulunan sayıların farkına eşitse, en alttaki kutuya yerleştirilen sayı en çok kaç olabilir?



(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

Çözüm:

Herhangi iki sayının farkı 10 olamayacağı için 10 en üstte olmalı. Bu durumda ikinci satırdaki en büyük rakam, en fazla 9 olabilir. Üçüncü satırdaki en büyük rakam 8 olamaz; çünkü bu durumda heme üstünde $9-1$ olması gerekir. 9'u üretmenin tek yolu $10-1$ olduğu için, 1 de kullanıldığı için mümkün değil. Demek ki, üstten üçüncü satırdaki en büyük rakam en fazla 7 olabilir. En alttaki sayının 5 olduğunu düşünelim. 7 yi üretmek için $8-1$ ya da $9-2$ gerekli. $7-2=5$ olduğu için 2 kullanılmış. Bu durumda 7'in üstünde 8 ve 1 var. 8, $9-1$ ya da $10-2$ şeklinde üretileceğinden 1 de 2 de kullanıldığından $7-2=5$ şeklinde son üç kutu yerleştirilemez. 5 olabilmesi için geriye tek ihtimal kalıyor. O da $6-1=5$. 6 yı üretmek için $8-2$ ya da $9-3$ gerekli. $8=10-2=9-1$ olacağından iki durumda da 1 ve 2 aşağılarda kullanıldığı için $6=8-2$ olamaz. $9-3$ için $9=10-1$ olacağından, 1 de aşağıda kullanıldığından bu da mümkün değil. Demek ki, en alttaki kutuya 5 gelemez.
4 olabilir mi?



Cevap: D

12.

$$x^2+y^2+z^2=21$$

$$x+yz+xyz=-3$$

$$x^2yz+y^2xz+z^2xy=-40$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x,y,z) gerçel sayı üçlüsü vardır?

(A) 0 **(B)** 3 **(C)** 6 **(D)** 12 **(E)** Hiçbiri

Çözüm:
$(xyz)(x+y+z)=-40$ ve $xyz+x+y+z=-3$ denklemlerini $xyz=P$ ve $x+y+z=S$ diyerek ortak çözersek

$$\begin{aligned} P+S &= -3 \\ PS &= -40 \\ P(-3-P) &= -40 \\ P^2+3P-40 &= 0 \end{aligned}$$

$P=-8, S=5$ ya da $P=5, S=-8$ elde ederiz.

$$(x+y+z)^2=(x^2+y^2+z^2)+2xy+2yz+2xz$$

özdeşliğinden dolayı

$$\begin{aligned} x+y+z=-8 &\Rightarrow xy+yz+yz=\frac{43}{2} \quad , \quad xyz=5 \\ x+y+z=5 &\Rightarrow xy+yz+yz=2 \quad , \quad xyz=-8 \end{aligned}$$

elde edilir. Vieta Teoremine göre x,y,z sayıları

$$x^3+8x^2+\frac{43}{2}x-5=0$$

ya da

$$x^3-5x^2+2x+8=0$$

denklemlerinin kökleridir. Kolaylık olsun diye önce ikincisini çözelim.

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8 \Rightarrow f(-1) = 0$$

olduğu için, denklemin bir kökü $x = 1$ sayısı, polinom bölmesi yaparak

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-4)$$

elde ederiz. Bu durumda $x = -1, y = 2, z = 4$ sorudaki denklem sisteminin çözüm kümesinin bir elemanıdır. $3! = 6$ farklı şekilde (x, y, z) sıralı gerçel üçlüsü elde edileceği için şu an için 6 farklı gerçel çözüm bulduk.

$$x^3 + 8x^2 + \frac{43}{2}x - 5 = 0$$

denklemine dönersek,

$$f'(x) = 3x^2 + 16x + \frac{43}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{43}{2} = -2 < 0$$

olduğu için denklemin karmaşık (kompleks) kökleri vardır. Bu son yaptığımızı biraz açarsak, normalde 3. dereceden bir eğrinin üç gerçel kökü olması için, x-eksenini üç kez kesmesi gerekir. Bu durum da eğrinin iki yerel ekstremumu olması gerekir. Biraz daha yalın türkçeyle, eğirin ekseni üç kez kesmesi için eğrinin iki kez kambur oluşturması gerekir. Bu noktalardaki türev, yani eğriye çizilen teğetler x-eksenine paralel olacağı için bu teğetlerin eğimi 0, yani o noktalardaki türev 0'dır. Diğer bir ifadeyle fonksiyonun türevini 0'a eşitlersek, fonksiyonun davranış (artan-azalan) değiştirdiği, kambur oluşturduğu noktaları buluruz. Bu şekilde gerçel noktalar olmadığı için denklemin iki kökü karmaşık, bir kökü gerçeldir. Bizim için tüm köklerin gerçel olması gerektiği için, bu denklemden gerçel kök çıkmaz.
Bu durumda sadece $(-1, 2, 4)$ sayılarının permütasyonu kadar çözüm vardır.

Cevap: C

13. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{\angle A}) = 90°$, $|AB| = \sqrt{12}$ ve $|AC| = 2$ olmak üzere, bu üçgenin dışına doğru $BEDC$ karesi kurulduğunda, karenin merkezi F, $[AF] \cap [BC] = G$ ise, $|BG|$ kaçtır?

(A) $6 - 2\sqrt{3}$ **(B)** $2\sqrt{3} - 1$ **(C)** $2 + \sqrt{3}$ **(D)** $4 - \sqrt{3}$ **(E)** $5 - 2\sqrt{2}$

Çözüm:
$\angle BFC = 90°$ olduğu için $AFBC$ kirişler dörtgenidir. $BF = FC$ olduğu için de AF, $\angle BAC$ nin iç açıortayıdır. Açıortay teoremi gereği

$$\begin{aligned} BG &= \frac{BC}{AB + AC} \cdot AB \\ &= \frac{4}{2 + 2\sqrt{3}} \cdot 2 = 6 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

Cevap: A

14. 72 tane pozitif böleni olan en küçük pozitif tam sayının on tabanına göre yazılımındaki rakamların karelerinin toplamı kaçtır?

(A) 41 **(B)** 65 **(C)** 110 **(D)** 123 **(E)** Hiçbiri

Çözüm:
Normalde, böyle bir soruda

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

olduğu için

$$n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 = 13860$$

gibi bir sayı seçerek toplamda 72 pozitif böleni olan sayıyı küçültmeye çalışırız. 13860 sayısının rakamlarının kareleri toplamı $1^2 + 3^2 + 8^2 + 6^2 + 0^2 = 110$ dur. Ama cevabımız ne yazık ki 110 değil.
$k = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ olmak üzere $n = 11k$ sayısının 72 pozitif böleni vardır (Az önce gösterdik.).
$n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ sayısını ele alalım. $d(n) = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 72$ olduğu için ve $n = 8k$ sayısı $n = 11k$ sayısından daha küçük olduğu için $n = 8k = 10080$ sayısının rakamlarının kareleri toplamı $1^2 + 8^2 = 65$ tir. $10080 < 13860$ olduğu için $72 = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ şeklinde bir çarpanlara ayırma $72 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ şeklinde bir çarpanlara ayırmadan daha küçük bir sonuç verecektir. Ama 72 pozitif böleni olan en küçük sayı $n = 10080$ sayısı mı? Aslında bunu söylemek o kadar da kolay değil. Test mantığıyla soruyu burada bırakmakta fayda var.

Ya, daha küçük bir sayı varsa? Haklısınız. Matematikte tahminlere yer yok.
Aslında bu soruyu 1644'te Mersenne öğrencilerine sormuş:
$D(k)$ ile tam olarak k pozitif böleni olan en küçük sayıyı gösterelim. Önce 60 pozitif bölene sahip bir sayı bulun. Sonra $D(60)$ ı hesaplayın.
Rahatça görüldüğü üzere bizim sorumuzdan farklı değil. Ne yazık ki, bu soru için deneme yapmaktan başka bir çözüm yok. Bu konu üzerine akademik çalışmalar var. Hangi tip sayılar için $D(k)$ falanca formdadır gibi özel sonuçlar elde edilmiş. Bu konunun biraz daha gelişmişi *Highly Composite Number* diye geçiyor. Kendisinden küçük sayılardan daha fazla bölene sahip sayılara benim çevirimle *bir hayli birleşik sayı* diyoruz. 10080 sayısı bir hayli birleşik bir sayı. Yani kendisinden küçük sayıların pozitif bölenleri sayısı 72'den küçük. O zaman 72 pozitif bölene sahip ilk sayı 10080 dir.
Yine de bu soru için tatmin olacağımız bir çözüm yapmaya çalışalım.

Cevap: B

15. 3×3 lük bir tahtadaki dokuz kareden dördü, ikisi kırmızı, ikisi maviye olmak üzere ve aynu renkte iki kare ne aynı satır ne de aynı sütunda yer alacak biçimde boyanıyor. Bu boyama işlemi kaç değişik biçimde yapılabilir?

(A) 198 **(B)** 288 **(C)** 396 **(D)** 576 **(E)** 792

Çözüm:
9 kareden birini kırmızıya boyadığımızda, kırmızı renk için geriye 4 uygun kare kalıyor. Geriye kalan 7 kareyi maviye $4+4+3+3+3+3+2=22$ şekilde boyarız. Yani toplamda $9 \times 22 = 792$ boyama oldu. Yalnız, kırmızılar kendis arasında, maviler de kendi arasında özdeş olduğu için 792'yi $2! \times 2! = 4$'e bölmemiz gerekiyor. $\dfrac{792}{4} = 198$ aradığımız cevap.

Cevap: A

16. $y = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{1999}}$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) rasyonel sayı ikilisi vardır?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** Sonsuz sayıda

Çözüm:

Her iki tarafın karesini alalım.

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{1999} \Rightarrow (y-x)(y+x) = \frac{1}{1999}$$

olacaktır. $y - x = r$ ise $y + x = \dfrac{1}{1999r}$ olur. Bu durumda $y = \dfrac{r + \frac{1}{1999r}}{2}$ ve $x = \dfrac{\frac{1}{1999r} - r}{2}$ elde edilir. Her r rasyonel sayısı için x, y sayıları rasyonel olacağı için sonsuz farklı çözüm vardır.

Cevap: E

17. Tabanı ABC eşkenar üçgeni ve tepe noktası T olan bir düzgün piramidin $[AB]$, $[BC]$, $[CT]$, $[TA]$ ayrıtlarının orta noktaları sırasıyla P, Q, R, S ile gösterilmek üzere, bu piramidin cisim yüksekliği $2\sqrt{15}$ ve $|AB| = 6$ ise, $Alan(PQRS)$ kaçtır?

(A) $4\sqrt{15}$ **(B)** $8\sqrt{2}$ **(C)** $8\sqrt{3}$ **(D)** $6\sqrt{5}$ **(E)** $9\sqrt{2}$

Çözüm:

T noktası A, B, C noktalarına eş uzaklıkta olacak. Bu durumda T'nin ABC düzlemindeki projeksiyonu ABC üçgeninin ağırlık merkezi olan G noktasıdır. $TG = 2\sqrt{15}$ soruda verilmiş. $AB = 6$ ise $AG = 2\sqrt{3}$ ve TAG dik üçgeninde

$$AT^2 = AG^2 + TG^2 \Rightarrow AT^2 = 72 \Rightarrow AT = 6\sqrt{2}$$

dir. ATB üçgeninde PS kenarları ortalayan bir doğru parçası olduğu için

$$PS = \frac{TB}{2} = 3\sqrt{2}$$

elde edilir. Bu işlemi diğer orta noktalar için de yapınca

$$PQ = SR = \frac{AC}{2} = 3, PS = QR = \frac{TB}{2} = 3\sqrt{2}$$

elde ediyoruz. Bu durumda $PQRS$ kenarları 3 ve $3\sqrt{2}$ olan bir paralelkenar oldu. Simetriden dolayı $PR = SQ$ olacağı için paralelkenar bir dikdörtgendir. Bu durumda

$$[PQRS] = 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

olacaktır.

Cevap: E

18. $t_k(n)$ ile n pozitif tam sayısının on tabanına göre yazılımındaki rakamların k inci kuvvetlerinin toplamını gösterelim. Aşağıdaki k değerlerinden hangisi için, 3 ün $t_k(n)$ yi bölmesi 3 ün n yi bölmesini gerektirmez?

(A) 3 **(B)** 6 **(C)** 9 **(D)** 15 **(E)** Hiçbiri

Çözüm:
$a^3 \equiv a \pmod 3$ olduğunu fark edelim. Daha genel bir şekilde, k negetif olmayan bir tam sayı ise

$$a^{2k+1} \equiv a \pmod 3$$

özdeşliği vardır. Buna göre,

$$\overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0} \equiv 10^m a_m + \cdots + 10a_1 + a_0 \equiv a_m + a_{m-1} + \dots a_1 + a_0 = a_m^{2k+1} + a_{m-1}^{2k+1} + ... + a_0^{2k+1} \pmod 3$$

olacaktır. Yani her k tek sayısı için $3|t_k(n)$ olduğunda otomatik olarak $3|n$ olacaktır. Dikkat edilirse, şıklardaki tek çift sayı 6.
$k = 6$ için

$$t_6(\overline{221}) = 129 \equiv 0 \pmod 3$$

iken

$$\overline{221} \equiv 2 + 2 + 1 \equiv 2 \pmod 3$$

tür.

Cevap: B

19. 2×5 lik bir satranç tahtasının üst sırasında sol köşeden itibaren ardışık k kareye siyah pullar konmuştur. Boş olan karelere istediğimiz sırayla beyaz pullar koyuyoruz. En az bir ortak köşeye sahip iki kare komşu sayılmak üzere, her beyaz pul konduğunda, komşu karelere daha önceden konmuş olan pılların rengi, beyazsa siyaha, siyahsa beyaza dönüşüyor. k nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için tüm kareler dolduğunda pulların hepsi beyaz olabilir?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** Hiçbiri

Çözüm:
$k > 1$ olduğu durumda

S	**S**			

ilk karedeki siyah taşın etrafında 2 boşluk olduğu için nihayetinde ($S \to B \to S$) siyaha dönüşecek. Bu durumda $k = 1$ olabilir, $k = 0$ olabilir, ya da hiçbir k değeri için bu şekilde bir yerleştirme yapılamaz.
$k = 1$ için, ilk taş siyah olacak.

S				

B	**B**			

B	S	**B**		

B	S	S	**B**	

B	S	S	S	**B**

Dikkat edilirse baştaki ve sondaki karenin 2 komşusu, diğerlerinin 3 komşusu var. 2 komşusu olan beyaz taşlar ($B \to S \to B$) beyaza, 3 komşusu olan siyah taşlar ($S \to B \to S \to B$) beyaza dönüşecek. Yani ikinci satırdaki taşlar hangi sırada konursa konsun, ilk sıradaki taşların tamamı beyaza dönüşecek. Bu durumda, ikinci sıradaki taşları beyaz taşları öyle yerleştirmeliyiz ki, hepsi beyaz olsun. Biraz düşününce (aslında birden çok bu şekilde diziliş var), ortadaki karenin 3 komşusu, baştaki ve sondaki karenin 1 komşusu, diğerlerinin (yani baştan ve sondan ikinci karelerin) 2 komşusu var. Beyaz taşın beyaza dönüşmesi için, değişime uğramaması, yani etrafına kendisinden sonra taş konmaması ya da çift sayıda taş konması gerekiyor. Önce 2 ve 4 nolu karelere, sonra 1 ve 5 nolu karelere, en son da 3 nolu kareye taşı yerleştirdiğimizde tüm taşlar beyaz olur.

S	B	B	S	B
	B			

S	B	S	B	S
	B		**B**	

B	S	S	B	S
B	S		B	

B	S	S	S	B
B	S		S	**B**

B	B	B	B	B
B	B	**B**	B	B

Cevap: B

20. $x^4 - 2^{-y^2}x^2 - [\![x^2]\!] + 1 = 0$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** Sonsuz sayıda

Çözüm:

$\{a\}$ ile a pozitif sayısının virgülden sonraki kısmını gösterelim. Buna göre

$$[\![x^2]\!] = x^2 - \{x^2\}$$

olacaktır.

$$\begin{aligned} x^4 - 2^{-y^2}x^2 - (x^2 - \{x^2\}) + 1 &= 0 \\ (x^4 - 2x^2 + 1) + x^2 - 2^{-y^2}x^2 + \{x^2\} &= 0 \\ (x^2 - 1)^2 + x^2(1 - \frac{1}{2^{y^2}}) + \{x^2\} &= 0 \end{aligned}$$

Sol taraftaki terimlerin üçü de ≥ 0 olduğu için, toplamlarının 0 olması için her birinin 0 olması lazım. Buna göre

$$(x^2 - 1) = 0 \wedge (1 - \frac{1}{2^{y^2}}) = 0 \wedge \{x^2\} = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \wedge y = 0 \wedge x \in \mathbb{Z}$$

olur. Bu durumda

$$(x, y) = (\pm 1, 0)$$

ile çözüm kümesinin eleman sayısı 2 olacaktır.

Cevap: C

21. ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 10°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 150°$ dir. $[AC]$ üstünde $|AX| = |BC|$ olacak şekilde X noktası alınıyor. $m(\widehat{BXC})$ kaç derecedir?

(A) 15 **(B)** 20 **(C)** 25 **(D)** 30 **(E)** 35

Çözüm 1:

$\angle YBA = \angle BAY = 10°$ olacak şekilde $[AC]$ üzerinde Y noktasını alalım. $BY = YA$ olacaktır. $\angle BYC = \angle BCY = 20°$ olduğu için $BY = BC$, dolayısıyla da $AX = AY$ olacaktır. Bu durumda X ile Y noktası çakışıktır. Yani $\angle BXC = 20°$.

Çözüm 2:

$[AC$ üzerinde $BA = BD$ olacak şekilde bir D noktası alalım.

$$\angle BDA = 10° \Rightarrow \angle DBC = 10°$$

olduğu için $CD = CB$ olacaktır. Bu durumda

$$DB = BA, DC = AX, \angle BDC = \angle BAX = 10°$$

olduğu için $\triangle BDC \cong \triangle BAX$ olacaktır. Bu da

$$BX = BC \Rightarrow \angle BXC = 20°$$

olmasını gerektirir.

Çözüm 3:

$BX = \sin 10°$ olsun. Bu durumda $AB = \sin X$ ve $AX = \sin(X - 10°) = BC$ olacaktır. $\triangle BXC$ üçgeninde Sinüs Teoreminden

$$\frac{\sin(X - 10°)}{\sin X} = \frac{\sin 10°}{\sin 20°}$$

elde edilir. Açık bir şekilde $X = 20°$ denklemi sağlar.

Çözüm 4:

$\angle BCA$ nın açıortayı AB yi Y de kessin.

$$\angle YCA = \angle YAC = 10° \Rightarrow CY = YA$$

$$\angle BCY = \angle YAX = 10° \wedge CY = YA \wedge AX = BC \Rightarrow \triangle AXY \cong \triangle CBY \Rightarrow BY = YX$$

$\angle XYB = \angle BCX = 20°$ olduğu için de $BYXC$ kirişler dörtgenidir. Bu durumda

$$\angle BYC = \angle BXC = 20°$$

olur.

Çözüm 5:

$\angle ABY = 30°$ olacak şekilde $[AC]$ üzerinde Y noktasını alalım.
Z, $[CB$ üzerinde $[BC]$ nin dışında $BZ = BY$ olacak şekilde bir nokta olsun.
$\triangle BZY$ eşkenar üçgendir. $AB \perp ZY$ olduğu için de $BZAY$ bir deltoiddir. Bu durumda $AZ = AY$ ve $\angle ZAB = \angle BAY = 10°$ olduğu için

$$\angle ZAC = 20° = \angle ZCA \Rightarrow AZ = CZ$$

elde edilir.

$$AX + XY = AY = CZ = BC + BZ \Rightarrow YX = BZ = BY$$

bilgisi eşliğinde

$$\angle BYC = 40° \Rightarrow \angle BXY = 20°$$

elde edilir.

Çözüm 6:

C nin AB ye göre simetriği D olsun. $\triangle ACD$ bir $80° - 20° - 80°$ üçgenidir. Bu durumda $\triangle BCD$ eşkenar; $AXBD$ dörtgeni de ikizkenar yamuk, yani kirişler dörtgenidir. Buna göre AB açıortay olduğu için DX de $\angle ADB$ nin açıortayıdır. Ayrıca $BD = BX = AX$ olduğu için de $\triangle AXB$ ikizkenar üçgen olur. Bu durumda $m(\widehat{BXC}) = 20°$ elde edilir.

Cevap: B

22. Aşağıdaki sayılardan hangisi, m ve n tam sayılar olmak üzere, $m^2 + 3mn - 4n^2$ şeklinde ifade edilemez?

(A) 69 **(B)** 76 **(C)** 91 **(D)** 94 **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

$$A = m^2 + 3mn - 4n^2 = (m + 4n)(m - n)$$

olduğu için,

$$\begin{aligned} m + 4n &= a_1 \\ m - n &= a_2 \end{aligned}$$

deyip taraf tarafa çıkarırsak,

$$\begin{aligned} 5n &= a_1 - a_2 \\ n &= \frac{a_1 - a_2}{5} \\ m &= n + a_2 \\ A &= a_1 a_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. A sayısını farkları 5 ile bölünen iki sayının çarpımı biçimde yazabilirsek, A sayısı

$$m^2 + 3mn - 4n^2 = (m + 4n)(m - n)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda $A = 69 = 23 \cdot 3$, $A = 76 = 76 \cdot 1$, $A = 91 = 91 \cdot 1$ ve $A = 94 = 47 \cdot 2$ sayılarının hepsi farkları 5 ile bölünen iki sayının çarpımı şeklinde yazılabilir.

Cevap: E

23. Saat kısmı 1 den 12 ye kadar olan sayıları gösteren dijital bir saatin, dakika kısmı doğru çalışmakta, ancak saat kısmı bir bozukluk sonucu, saat başlarında $n : 59$ dan sonra, ($n+1$ ve $2n$, mod 12 düşünülmek üzere), $(n+1) : 00$ olacağına, $2n : 00$ a atlamaktadır. (Örneğin, saat, $7 : 00$ a ayarlanırsa, bir saat sonra $8 : 00$ yerine $2 : 00$ olmaktadır.) Saati gelişi güzel bir zamana ayarlar ve aradan bir gün geçtikten sonra saate bakarsak, saat kısmının 4 ü gösteriyor olma olasılığı kaçtır?

(A) $\frac{1}{12}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** Hiçbiri

Çözüm:
Saat şu anda $n : 30$ olsun. 1 saat sonra $2n : 30$ olacaktır. Buna göre, saat 24 saat içerisinde

$$\begin{aligned} t_0 &\equiv n \pmod{12} \\ t_1 &\equiv 2n \pmod{12} \\ &\vdots \\ t_{24} &\equiv 2^{24}n \pmod{12} \end{aligned}$$

değerlerini alacaktır. 24 saat sonra

$$t_{24} \equiv 2^{24} \equiv 4 \pmod{12}$$

olacaksa

$$2^{24}n \equiv 4n \equiv 4 \pmod{12}$$

denkliğinden k bir tam sayı olmak üzere;

$$4n - 4 = 12k \Rightarrow n - 1 = 3k \Rightarrow n = 3k + 1$$

elde edilir. $[1, 12]$ aralığındaki 12 sayıdan $\{1, 4, 7, 10\}$ sayılarının 3 ile bölümünden kalan 1 olduğu için

$$P(2^{24}n \equiv 4 \pmod{12}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

olarak bulunur.

Cevap: C

24. $f(x)$ polinomu her x gerçel sayısı için $(x-1)f(x+1) - (x+2)f(x) = 0$ koşulunu sağlıyor. $f(2) = 6$ ise, $f(\frac{3}{2})$ kaçtır?

(A) -6 **(B)** 0 **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** $\frac{15}{8}$ **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

$$f(x) = \frac{(x-1)f(x+1)}{x+2}$$

olduğu için $f(1) = 0$ ve polinomun bir kökü $(x-1)$ olur.
x yerine $x-1$ dersek,

$$(x-2)f(x) - (x+1)f(x-1) = 0 f(x) = \frac{(x+1)f(x-1)}{x-2}$$

olduğu için $f(-1) = 0$ ve polinomun diğer kökü $(x+1)$ olur.
$f(x) = g(x)(x-1)(x+1)$ olsun. Soruda verilen denklemi yeniden yazarsak

$$\begin{aligned} (x-1)g(x+1)x(x+2) - (x+2)g(x)(x-1)(x+1) &= 0 \\ (x-1)(x+2)(g(x+1)x - g(x)(x+1)) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{g(x+1)}{g(x)} &= \frac{x+1}{x} \\ g(x) &= \frac{xg(x+1)}{x+1} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda $g(0) = 0$ ve $g(x) = xh(x)$ tir. Bu son bulduğumuzu

$$\frac{g(x+1)}{g(x)} = \frac{x+1}{x}$$

eşitliğinde yerine yazarsak

$$\frac{(x+1)h(x+1)}{xh(x)} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow \frac{h(x+1)}{h(x)} = 1$$

elde ederiz. Buradan da $h(x) = A$ sabit bir fonksiyon olarak elde edilir. Son olarak

$$f(x) = x(x-1)(x+1)A$$

elde edilir. $f(2) = 6$ değerini yerine yazarsak

$$f(2) = 2(2-1)(2+1)A = 6 \Rightarrow A = 1$$

elde ederiz. Son durumda $f(x) = x(x-1)(x+1)$ ve $f(\frac{3}{2}) = \dfrac{3}{2}(\dfrac{3}{2} - 1)(\dfrac{3}{2} + 1) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{8}$ elde edilir.

Cevap: D

25. ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 80°$ ve $|AB| = |AC|$ dir. $[AB]$ üstünde K ve $[AB$ üstünde L noktaları, $|AB|^2 = |AK| \cdot |AL|$ ve $|BL| = |BC|$ olacak şekilde alınıyor. $m(\widehat{KCB})$ kaç derecedir?

(A) 20 **(B)** 25 **(C)** 30 **(D)** 35 **(E)** 40

Çözüm:

$$BC = BL, \angle BLC = 25°, AK \cdot KL = AB^2 = AC^2$$

olduğu için $\triangle ACK \sim \triangle ACL$, dolayısıyla da

$$\angle ACK = \angle ALC = 25° \Rightarrow \angle KCB = 25°$$

olacaktır.

Benzerliği fark edemeyenler için

$$AK \cdot KL = AC^2 \Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AC}{AL}$$

ve

$$\angle KAC = \angle LAC$$

olduğu için $\triangle ACK \sim \triangle ACL$ $(K.A.K)$ dır. Aslında bu tip soruda *benzerlik vardır* ara adımını atlayabiliriz. $AK \cdot AL = AC^2$ ifadesi A dan $\triangle CKL$ üçgeninin çevrel çemberine çizilen teğetin denklemidir. Bu durumda teğet-kiriş açıdan $\angle ACK = \angle ALC$ olacaktır. Bu tip $xy = z^2$ tarzı eşitliklerde, teğet-kiriş açıyı hemen fark etmemiz gerekiyor.

Cevap: B

26. x, y, z tam sayıları

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x + y - 5z &= 7 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlıyorsa z aşağıdakilerden hangisi olabilir?

(A) 3^{111} **(B)** 4^{111} **(C)** 5^{111} **(D)** 6^{111} **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

3 bilinmeyen 2 denklem var. Yani denklem sistemini çözemeyiz. Ama x, y, z tam sayılar olduğu için z hakkında yorum yapabiliriz. Denklem sisteminde x i yok etmeye çalışalım.

$$\begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 2 \\ -2x - y + 5z &= -7 \\ -7y + 9z &= -5 \end{aligned}$$

y yi yok edelim.

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ 6x + 3y - 15z &= 21 \\ 7x - 13z &= 22 \end{aligned}$$

Son bulduğumuz değerleri mod 7 de inceleyelim.

$$\begin{aligned} -7y + 9z &= -5 \\ 2z &\equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow z \equiv 1 \pmod 7 \\ 7x - 13z &= 22 \\ z &\equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

Bu durumda z nin 7 ile bölümünden kalan 1 olmalı. 7 asal sayı, şıklardaki üslerin hepsi 111 olduğu için Euler'in Phi (ϕ) Fonksiyonunu, ya da Fermat'ın Küçük Teoremini kullanarak

$$\begin{aligned} a^6 &\equiv 1 \pmod 7 \\ a^{108} &\equiv 1 \pmod 7 \\ a^{111} &\equiv a^3 \pmod 7 \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $3, 4, 5, 6$ sayılarından küpü 7 ile bölündüğünde 1 kalanını veren sayıyı arıyoruz.

$$4^3 \equiv 1 \pmod 7$$

olduğu için aradığımız sayı 4 tür. Diğer şıklar mod 7 de -1 kalanını verirler.

Cevap: B

27. Kenar uzunluğu c olan bir karenin noktaları kırmızı ya da maviye boyanıyor. Bu boyama nasıl yapılırsa yapılsın, aralarındaki uzaklık en az $\sqrt{5}$ olan aynı renkte iki nokta bulunuyorsa, c nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ **(B)** 2 **(C)** $\sqrt{5}$ **(D)** $2\sqrt{2}$ **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

Öncelikle şunu ifade edelim. Karenin iç bölgesindeki noktaları boyamıyoruz. Karenin kenarları üzerindeki noktaları boyuyoruz. $ABCD$ karesinde AB nin orta noktası E, CD nin orta noktası F olsun. EF üzerinden kareyi ikiye bölelim. Bir tarafını tamamen kırmızıya, diğer tarafını tamamen maviye boyayalım.
$c < 2$ ise yukarıda anlatıldığı gibi bir boyamada, aynı renkte iki noktanın arasındaki uzaklık en fazla $\triangle ADF$ üçgenindeki A, F noktaları arasındaki uzaklık kadardır. $AD = c$ ve $DF = \dfrac{c}{2}$ olduğu için Pisagordan

$$AF^2 = AD^2 + DF^2 = c^2 + \frac{c^2}{4} = \frac{5c^2}{4} \Rightarrow AF = \frac{c\sqrt{5}}{2}$$

olur. $c < 2$ olduğu için

$$AF = \frac{c\sqrt{5}}{2} < \frac{2\sqrt{5}}{2} < \sqrt{5}$$

olacağı için, $c < 2$ olan bir karede aralarındaki uzaklık $\sqrt{5}$ olan aynı renk iki nokta bulunamayabilir. Demek ki, $c \geq 2$ olmalı. $c = 2$ olan karede boyamalar nasıl yapılırsa yapılsın, aralarındaki uzaklık en az $\sqrt{5}$ olan aynı renkte iki nokta bulunuyorsa aradığımız yanıt $c = 5$. Bulunmuyorsa, bu durumda $c > 2$ olacak şekilde başka arayışlara gireceğiz.
$c = 2$ olan bir kare ele alalım. Aralarındaki uzaklık $\sqrt{5}$ ten küçük olacak şekilde boyama yapmaya çalışacağız. Bunu başarırsak, aradığımız yanıt $c = 2$ değil. Başaramazsak, yani ne yaparsak yapalım, aralarındaki uzaklık en az $\sqrt{5}$ olan aynı renkli iki nokta oluyorsa, aradığımız yanıt $c = 2$ olacak.
A ile C aynı renkli olamaz. Olursa $AC = 2\sqrt{2} > \sqrt{5}$ olduğu için, soruda istenen şekilde boyama yapmış oluruz. Hatırlatalım, elimizden geldiğince bu şekilde boyama yapmayacağız. Benzer şekilde B ile D de aynı renkli olamaz. O zaman bu durumda ya B ile C, ya da C ile D aynı renkli. B ile C aynı renkli olsun. Bu durumda A ile D de aynı rekli olur. Genelliği bozmadan B ile C yi kırmızı, A ile D yi de mavi kabul edelim. E ya kırmızı ya da mavi olacak. Mavi ise, $DE = \sqrt{5}$ olacak; kırmızı ise $CE = \sqrt{5}$ olacak. Yani ne yaparsak yapalım aralarındaki uzaklık $\sqrt{5}$ olan aynı renkli iki nokta bulabiliyoruz. Bu durumda, bu şartı sağlayan karelerin en küçük kenarlısı için $c = 2$ dir.

Cevap: B

28. Pozitif gerçel sayılar üzerinde tanımlı, $f(1) = 1$ koşulu ile tüm x, y gerçel sayıları için $f(x^2y^2) = f(x^4 + y^4)$ koşulunu sağlayan kaç f fonksiyonu vardır?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** Sonsuz sayıda

Çözüm:

$xy = 1$ ise

$$f(1) = f\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$$

$AO \geq GO$ dan

$$x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2$$

elde edilir. Bu durumda

$$f(x \geq 2) = f(1) = 1$$

elde edilir.Yani $x \in [2, \infty)$ için $f(x) = 1$ elde edilir. $x = y$ ise $f(x^4) = f(2x^4)$ olacağından $(0, 2)$ aralığındaki her x için yeteri kadar $f(x^4) = f(2x^4) = f(4x^4) = \cdots = f(2^n x^4) = f(K)$ eşitliği kullanıldığında $K = 2^n x^4 \geq 2$ olacağı için $f(K) = f(1) = 1$ olur. Bu durumda $(0, \infty)$ aralığındaki her x için $f(x) = f(1) = 1$ olacaktır. Yani sorudaki koşulu sağlayan tek bir f fonksiyonu vardır.

Cevap: B

29. Yüksekliği 3 olan ABC eşkenar üçgeninin $[BC]$ kenarına orta noktasında teğet olan ve diğer kenarları da kesen 2 yarıçaplı çember çiziliyor. AB ve AC nin çemberi üçgenin dışında kestiği noktalar D ve E olmak üzere, $Alan(ABC)$ nin $Alan(ADE)$ ye oranı kaçtır?

(A) $2(5+\sqrt{3})$ **(B)** $7\sqrt{2}$ **(C)** $5\sqrt{3}$ **(D)** $2(3+\sqrt{5})$ **(E)** $2(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

Çözüm:

Çemberin merkezi O ve $[AB]$ ile çember F de kesişsin.$\triangle AFO$ da, ister Cosinüs Teoreminden ister AF ye ait yüksekliği çizerek AF yi bulabiliriz. Yükseklik yaklaşımını kullanalım.
$\triangle AOF$ de OH, AF ye ait yükseklik olsun. $\angle FAO = 30°$, $AO = 1$ ve $OF = 2$ olduğu için

$$OH = \frac{1}{2}, AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

olarak elde edilir. $\triangle OHF$ dik üçgeninde Pisagordan

$$HF^2 = OF^2 - OH^2 \Rightarrow HF^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow HF = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$AF = AH + HF = \frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

olur. A noktasının çembere göre kuvvetinden

$$AE \cdot AF = 1 \cdot 3 \Rightarrow AE = \frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{15}}$$

elde edilir. Benzer şekilde $AD = AE$ elde edilir. $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ olduğu için

$$\frac{[ABC]}{[ADE]} = \frac{AB^2}{AE^2}$$

olacaktır. $AB = 2\sqrt{3}$ ve $AE = \dfrac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{15}}$ olduğu için

$$\frac{[ABC]}{[ADE]} = \frac{AB^2}{AE^2} = \frac{(2\sqrt{3})^2}{\left(\dfrac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{15}}\right)^2} = \frac{12(\sqrt{3} + \sqrt{15})^2}{36} = 6 + 2\sqrt{5} = 2(3 + \sqrt{5})$$

Cevap: D

30. Her $0 \leq i \leq 9$ için $a_i \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, $6\sum_{i=0}^{9} a_i 5^i \equiv 1 \pmod{5^{10}}$ ise, a_9 aşağıdakilerden hangisidir?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Çözüm:

Tüm işlemlerimizi 10 tabanı yerine 5 tabanında yaparsak, bizden istenen

$$(11)_5 \cdot (a_9 a_8 \dots a_0)_5 = (b_n \dots b_{10} b_9 b_8 \dots b_0) = (b_n \dots b_{10} 00 \dots 1)$$

eşitliğindeki a_i leri bulmamız. Eşitliği

$$(11)_5 \cdot (a_9 a_8 \dots a_0)_5 = (a_9 a_8 \dots a_0 0)_5 + (a_9 a_8 \dots a_0)_5 = (b_n \dots b_{10} 00 \dots 1)$$

olarak yeniden yazdığımızda 5^0 lar basamağının eşitliğinden $a_0 = 1$ olduğu hemen fark edilir. Daha sonra 5^1 ler basamağında $a_0 + a_1 = 0$ olduğu için $a_1 = 4$ olarak elde edilir. Bu işlem ilkokul toplamasındaki gibi devam ettirilerek

$$(40404040410)_5 + (4040404041)_5 = (100000000001)_5 \equiv 1 \pmod{5^{10}}$$

elde edilir. Bu durumda $a_9 = 4$ tür.

Cevap: E

31. Birbirinin aynı olan 30 top, A ve B deki topların toplam sayısı, C ve D dekilerin toplam sayısından fazla olmak üzere, A, B, C, D kutularına kaç değişik biçimde dağıtılabilir?

(A) 2472 **(B)** 2600 **(C)** 2728 **(D)** 2856 **(E)** Hiçbiri

Çözüm 1:
A ve B deki topların toplam sayısı, C ve D deki topların toplam sayısından fazla olduğu S farklı dağılım olsun. Simetriden dolayı C ve D deki topların toplam sayısı, A ve B deki topların toplam sayısından fazla olduğu S farklı dağılım olur. $A+B = C+D$ olacak şekilde T farklı dağıtılım yapılıyorsa, hiçbir şart olmadan 30 top bu dört kutuya $S + T + S$ farklı şekilde dağıtılabilir.
$A + B = 15$ ve $C + D = 15$ olacak şekilde,

$$T = \binom{2+15-1}{15}\binom{2+15-1}{15} = \binom{16}{15}\binom{16}{15} = 16 \cdot 16 = 256$$

farklı dağıtım yapılabilir.
$A + B + C + D = 30$ olacak şekilde,

$$2S + T = \binom{4+30-1}{30} = \binom{33}{30} = 5456$$

farklı şekilde dağıtılacağı için

$$2S + 256 = 5456 \Rightarrow S = \frac{5200}{2} = 2600$$

elde edilir.

Çözüm 2:
$P(k)$ ile $A + B = k$ olacak şekilde olan dağılımları gösterelim. Açık şekilde $P(k) = k + 1$ dir. Benzer şekilde $Q(k)$ ile $C + D = k + 1$ olacak şekilde olan dağılımları gösterelim.
A ve B deki topların toplam sayısı, C ve D dekilerin toplam sayısından fazla olmak üzere,

$$\sum_{i=16}^{30} P(i)Q(30-i)$$

farklı dağıtım yapılabilir.

$$S = \sum_{i=16}^{30} P(i)Q(30-i) = \sum_{i=16}^{30} (i+1)(31-i) = 17 \cdot 15 + 18 \cdot 14 + \cdots + 31 \cdot 1$$

İlk çözümdeki mantığı kullanarak,

$$T = \sum_{i=1}^{31} i(32-i) 1\cdot 31 + 2\cdot 30 + \cdots + 15\cdot 17 + 16\cdot 16 + 17\cdot 15 + \cdots + 30\cdot 2 + 31\cdot 1$$

elde edilir. Bu durumda

$$S = \frac{T-256}{2}$$

olacaktır.

$$T = \sum_{i=1}^{31} i(32-i) = 32\sum_{i=1}^{31} i - \sum_{i=1}^{31} i^2 = 32\cdot\frac{31\cdot 32}{2} - \frac{31\cdot 32\cdot 63}{6} = \frac{31\cdot 32}{2}\left(32 - \frac{63}{3}\right) = 31\cdot 16\cdot 11$$

$$S = \frac{T-256}{2} \Rightarrow S = \frac{31\cdot 16\cdot 11 - 16\cdot 16}{2} = \frac{16(31\cdot 11 - 16)}{2} = 8\cdot(325) = 2600$$

elde edilir.

Cevap: B

32. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayılar dizisi, her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$ koşulunu sağlıyorsa, $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesinin eleman sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

olduğu için $a_1 = a$ ve $a_2 = b$ ise

$$a_3 = \frac{b}{a}, a_4 = \frac{1}{a}, a_5 = \frac{1}{b}, a_6 = \frac{a}{b}, a_7 = a, a_8 = b$$

elde edilir. Bu durumda $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesinin elemanları $a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}$ dan oluşur.

$a = 1, b = -1$ ise $1, -1, 1, -1, -1, -1$ olduğundan $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesi 2 elemanlı olacaktır.

$a = b \neq 1$ ise $a, a, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, 1, 1$ olduğundan $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesi 3 elemanlı olacaktır.
$b = a^2 \neq 1$ olduğunda $a, a^2, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, a$ olduğundan $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesi 4 elemanlı olacaktır.
$a = -b \notin \{1, -1\}$ ise $a, -a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, -1, -1$ olduğundan $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesi 5 elemanlı olacaktır.
Bu durumda cevap hiçbiridir.

Cevap: E

33. $|AC| = 8\sqrt{2}$; $[AC]$ nın orta noktası B; $[AB]$ nı kiriş kabul eden bir çemberin AB yayının orta noktası E; C noktasından bu çembere çizilen teğetin değme noktası da, (D ile E, AB doğrusunun ters taraflarında olmak üzere) D dir. $[DE] \cap [AB] = \{F\}$ ise, $|CF|$ kaçtır?

(A) $5\sqrt{2}$ **(B)** $4\sqrt{2}$ **(C)** 8 **(D)** 6 **(E)** $4\sqrt{3}$

Çözüm:

C noktasının çembere göre kuvvetinden

$$CD^2 = BC\cdot AC = 4\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{2} = 64 \Rightarrow CD = 8$$

elde edilir.

$$\angle BFD = \frac{\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{BD}}{2} \text{ ve } \angle CDF = \frac{\overset{\frown}{EB} + \overset{\frown}{BD}}{2}$$

olduğu için

$$\angle CFD = \angle CDF \Rightarrow CF = CD = 8$$

elde edilir.

Cevap: C

34. Kaç p asal sayısı için, $x^3 - x + 2 \equiv (x-r)^2(x-s) \pmod p$ denkliğinin tüm x tam sayıları tarafından gerçeklenmesini sağlayan r, s tam sayıları bulunabilir?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

$$x^3 - x + 2 \equiv (x-r)^2(x-s) \pmod p$$

$$f(r) = r^3 - r + 2 \equiv 0 \pmod p)..*$$

$$f'(x) = 2(x-r)(x-s) + (x-r)^2 \Rightarrow f'(r) = 3r^2 - 1 \equiv 0 \pmod p)..**$$

$p = 3$ için

$$-1 \not\equiv 0 \pmod 3$$

olacağı için $p \neq 3$ tür. Bu durumda denkliği 3 ile genişletmek sorun çıkarmaz.

$$3f(r) \equiv 0 \pmod p \Rightarrow 3r^3 - 3r + 6 \equiv (3r^2 - 1)r - 2r + 6 \equiv 0 \pmod p$$

Daha önce elde ettiğimiz $f'(r) = 3r^2 - 1 \equiv 0 \pmod p$ özdeşliğini kullanarak,

$$-2r + 6 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow r \equiv 3 \pmod p \text{ veya } p = 2$$

elde edilir. $r \equiv 3 \pmod p$ ise

$$f'(r) = 3r^2 - 1 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow 26 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow p = 2 \text{ veya } p = 13$$

elde edilir. Sonuçta, $(p, r) = (13, 3)$ veya $(p, r) = (2, 3) \equiv (2, 1) \pmod p$ elde edilir. Vieta formülüne göre, köklerin toplamları 0 olacağı için

$$r + r + s = 0 \Rightarrow s = -2r$$

, buradan da $(p, r, s) = (13, 3, 7)$ ve $(p, r, s) = (2, 1, 0)$ çözümleri elde edilir.

Cevap: C

35. 13 kent arasında, karşılıklı olması gerekmeyen uçak seferleri yapılıyor. $k \geq 2$ olmak üzere, A_1 den A_2 ye, A_2 den A_3 e, ..., A_{k-1} den A_k ye ve A_k den A_1 e uçak seferi varsa, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ dizisine bir çevrim diyelim. Seferler hangi kentler arasında olursa olsun, bir çevrimin oluşmasını gerektiren en küçük toplam sefer sayısı kaçtır?

(A) 14 **(B)** 53 **(C)** 66 **(D)** 79 **(E)** 156

Çözüm:

$A_1A_2 \ldots A_{13}$ bir 13-gen olsun. Köşegenleri ve kenarları çizelim. Bu yollara $i < j$ ise $A_i \to A_j$ olacak şekilde yön verelim. Bu durumda $\binom{13}{2} = 78$ yol vardır. Bu stratejiye göre, bir çevrimin olabilmesi için $1 < 2 < \cdots < k < 1$ gerekir. Bu mümkün değil. Demek ki, bu 78 yol hiçbir şekilde bir çevrim oluşturmuyor. Bu sayı aynı zamanda $1 \leq i < j \leq 13$ olacak şekilde yazılabilecek (i, j) sıralı çiftlerin sayısıdır. 79. çifti ele aldığımızda mecburen $i > j$ olacaktır.

Cevap: D

36. $x_1, \ldots, x_9$ gerçel sayıları, $i = 1, 2 \ldots, 9$ için $|x_i| \leq 1$ ve $\sum_{i=1}^{9} x_i^3 = 0$ koşullarını sağlıyorsa, $\sum_{i=1}^{9} x_i$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

(A) 1 **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** 3 **(D)** $\frac{9}{2}$ **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

Her $1 \leq x_i = \sin(\alpha_i) \leq 1$ sayısı bir açının sinüsüne eşittir. Bunula birlikte

$$\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$$

özdeşliğini kullanarak

$$\sum_{i=1}^{9} \sin(3\alpha_i) = 3\sum_{i=1}^{9} \sin(\alpha_i) - 4\sum_{i=1}^{9} \sin^3(\alpha_i)$$

elde ederiz.

$$\sum_{i=1}^{9} \sin(3\alpha_i) = 3\sum_{i=1}^{9} \sin(\alpha_i) \leq 9 \Rightarrow \sum_{i=1}^{9} \sin(\alpha_i) \leq 3$$

elde edilir. Eşitlik hali için

$$\sin(3\alpha_1) = \sin(3\alpha_2) = \cdots = \sin(3\alpha_9) = 1 = \sin(90^\circ) = \sin(-270^\circ) \Rightarrow \alpha_i \in \{30^\circ, -90^\circ\}$$

olması gerekir. Aynı zamanda

$$\sum_{i=1}^{9} \sin^3(\alpha_i) = 0$$

olması gerektiğinden eşitlik hali

$$\sin(\alpha_1) = \sin(\alpha_2) = \cdots = \sin(\alpha_8) = \frac{1}{2} \text{ ve } \sin(\alpha_9) = -1$$

iken sağlanır.

Cevap: C