6. Ulusal Matematik Olimpiyatı 1. Aşama Sınavı - 1998

1. Kenar uzunlukları $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ olan bir ABC üçgeninde $3m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180°$ ve $3a = 2c$ ise, b nin a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

   (A) $\dfrac{3a}{2}$ **(B)** $\dfrac{5a}{4}$ **(C)** $a\sqrt{2}$ **(D)** $a\sqrt{3}$ **(E)** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

   Çözüm 1:

   $\angle C = 2 \cdot \angle A = 2\alpha$ olur. $\angle C$'nin açıortayı CD'yi çizelim. $\angle BCD = \angle DCA = \angle CAB = \alpha$ olacaktır. Bu durumda $\triangle CBD \sim \triangle ABC$ $(A.A)$ elde edilir.

   $$\frac{CB}{AB} = \frac{BD}{CB} \Rightarrow CB^2 = BD \cdot AB \Rightarrow a^2 = BD \cdot \frac{3a}{2} \Rightarrow BD = \frac{2a}{3} \Rightarrow AD = \frac{3a}{2} - \frac{2a}{3} = \frac{5a}{6}$$

   olur. Açıortay teoreminden

   $$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{a}{\frac{2a}{3}} = \frac{b}{\frac{5a}{6}} \Rightarrow \frac{5a}{4} = b$$

   elde edilir.

   Çözüm 2:

   Sinüs Teoremin'den $\dfrac{AB}{\sin 2\alpha} = \dfrac{BC}{\sin\alpha} = \dfrac{AC}{\sin 180° - 3\alpha}$ olur.

   $$\frac{c}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin 3\alpha} \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{4}$$

   İlk denklemden b'yi çekersek, $b = a\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$ elde ederiz.
   $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ olduğu için $b = a(3 - 4\sin^2\alpha)$ elde edilir.
   $\cos\alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{9}{16} \Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{7}{16}$ olacağı için $b = a(3 - 4\sin^2\alpha) = a(3 - 4\dfrac{7}{16}) = a\dfrac{5}{4}$ elde edilir.

   Çözüm 3:

   $[AC$ üzerinde ($\triangle ABC$'nin dışında) $BC = CD = a$ olacak şekilde D noktası alalım. $\angle BDC = \dfrac{\angle BCA}{2} = \angle CAB$ olduğu için $BD = AB = c$ dir. İkizkenar üçgende Stewart'ın özel halinden

   $$AB^2 - AC \cdot CD = BC^2 \Rightarrow (\frac{3a}{2})^2 - b \cdot a = a^2 \Rightarrow b = \frac{\frac{9a^2}{4} - a^2}{a} = \frac{5a}{4}$$

   olur.

   Cevap: B

2. 2^{1998} sayısının ondalık yazılımı ile 5^{1998} sayısının ondalık yazılımını art arda yazarsak, oluşan yeni sayı kaç basamaklı olur?

   (A) 1998 **(B)** 1999 **(C)** 2000 **(D)** 3996 **(E)** 3998

   Çözüm 1:

   $10^a < 2^{1998} < 10^{a+1}$ ise 2^{1998} sayısı $a + 1$ basamaklıdır.
   $10^b < 5^{1998} < 10^{b+1}$ ise 5^{1998} sayısı $b + 1$ basamaklıdır.
   Taraf tarafa çarparsak

   $$10^{a+b} < 10^{1998} < 10^{a+b+2}$$

olacağından, $a + b < 1998 = a + b + 1 < a + b + 2$ elde edilir. Bu durumda yeni sayı $(a + 1) + (b + 1) = a + b + 2$ basamaklı olacağından $a + b + 1 = 1998 \Rightarrow a + b + 2 = 1999$ elde edilir.

Çözüm 2:

$2^{1998} = 10^a$ olsun. 10^a sayısı da $\lfloor a \rfloor + 1$ dir. Her iki tarafın log unu alırsak, $1998 \log 2 = a$ olacağından 2^{1998} sayısı $\lfloor a \rfloor + 1 = \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + 1$ basamaklı olacaktır.
Benzer şekilde $5^{1998} = 10^b$ sayısı da $\lfloor 1998 \log 5 \rfloor + 1$ basamaklı olacaktır.
Bu iki sayının yan yana yazımı $\lfloor 1998 \log 2 \rfloor + 1 + \lfloor 1998 \log 5 \rfloor + 1 = \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + \lfloor 1998 \log 5 \rfloor + 2$ basamaklıdır.

$$1998 \log 2 - 1 < \lfloor 1998 \log 2 \rfloor < 1998 \log 2$$

$$1998 \log 5 - 1 < \lfloor 1998 \log 5 \rfloor < 1998 \log 5$$

ifadelerini taraf tarafa toplarsak,

$$1998(\log 2 + \log 5) - 2 < \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + \lfloor 1998 \log 5 \rfloor < 1998(\log 2 + \log 5)$$

elde edilir. $\log 2 + \log 5 = \log 2 \cdot 5 = \log 10 = 1$ olacağından,

$$1998 - 2 = 1996 < \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + \lfloor 1998 \log 5 \rfloor < 1998$$

olur. Bu durumda aranan sayı $\lfloor 1998 \log 2 \rfloor + \lfloor 1998 \log 5 \rfloor + 2 = 1997 + 2 = 1999$ basamaklı olacaktır.

Çözüm 3:

Çözüm 2'deki yolu biraz kısaltacağız.
İlk sayı $A = \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + 1$ basamaklı, ikinci sayı $B = \lfloor 1998 \log 5 \rfloor + 1$ basamaklı. $\log 2 + \log 5 = 1 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2$ özdeşliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} A + B &= \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + 1 + \lfloor 1998(1 - \log 2) \rfloor + 1 \\ &= \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + 1 + \lfloor 1998 - 1998 \log 2) \rfloor + 1 \\ &= 2000 + \lfloor 1998 \log 2 \rfloor + \lfloor -1998 \log 2 \rfloor \end{aligned}$$

$\lfloor \ \rfloor$ fonksiyonu ile aşmayan en büyük tam sayıyı gösterdiğimiz için pozitif değer $0 \le n < 1$ ve M tam sayı olmak üzere; $\lfloor M + n \rfloor = M$ ise $\lfloor -(M + n) \rfloor = -M - 1$ dir.
Bu durumda, $A + B = 2000 - 1 = 1999$ olacaktır.

Çözüm 4:

Biraz test mantığı ile soruya yaklaşacağız.
$n = 0$ için $\overline{2^0 5^0} = 11 \Rightarrow 2$ basamaklı
$n = 1$ için $\overline{2^1 5^1} = 25 \Rightarrow 2$ basamaklı
$n = 2$ için $\overline{2^2 5^2} = 425 \Rightarrow 3$ basamaklı
$n = 3$ için $\overline{2^3 5^3} = 8125 \Rightarrow 4$ basamaklı
$n = 4$ için $\overline{2^4 5^4} = 16625 \Rightarrow 5$ basamaklı
$n = 5$ için $\overline{2^5 5^5} = 323125 \Rightarrow 6$ basamaklı
$n = 6$ için $\overline{2^6 5^6} = 6415625 \Rightarrow 7$ basamaklı
$n = 7$ için $\overline{2^7 5^7} = 12878125 \Rightarrow 8$ basamaklı
Bu şekilde giderse $n = 1998$ için $\overline{2^{1998} 5^{1998}}$ sayısı $n + 1 = 1999$ basamaklı olacaktır.
Bu çıkarımımız tamamen sezgiseldir. 1999 cevabı test tekniği açısından bir tahmin niteliği taşımaktadır. Olimpiyat sorularında bu tip çıkarımlar yaparken dikkatli olunmalıdır. Ters köşeye yatabiliriz.

Cevap: B

3. 6 elemanlı bir küme hiçbiri boş olmayan üç ayrık altkümeye kaç değişik biçimde ayrılabilir?

(A) 90 **(B)** 105 **(C)** 120 **(D)** 180 **(E)** 243

Çözüm 1:

Kümenin 6 elemanını 3 kutuya yerleştireceğiz.
Her eleman için 3 alternatif olduğu için 3^6 farklı yolla bu işlem yapılabilir.

Yalnız, yukarıdaki dağıtımda bazı kutular boş kalmış olabilir. İçerme-Dışarma İlkesine göre
(0,1 veya 2 kutunun boş olduğu durumlar) - (1 veya 2 kutunun boş olduğu durumlar) + (2 kutunun boş olduğu durumlar)
(0,1 veya 2 kutunun boş olduğu durumlar): 3^6
(1 veya 2 kutunun boş olduğu durumlar): $\binom{3}{1}2^6$ (Boş olacak bir kutu seçiliyor, diğerleri akışına bırakılıyor.)
(2 kutunun boş olduğu durumlar): $\binom{3}{2}1^6$ (Boş olacak iki kutu seçiliyor, diğerleri boş olmayan kutuya koyuluyor.)
Bu durumda $3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 729 - 192 + 3 = 540$ farklı yolla bu işlem yapılabilir. Yalnız, mesela tüm 6 eleman da 1., 2. ve 3. kutularda birer kez yer aldı. 540'ın içinde kutuların sıralınışı da var. Bu durumda $\dfrac{540}{3!} = 90$ farklı yolla, kutuların sıralanışı önemsenmeksizin elemanları 3 kutuya yerleştirebiliriz.

Çözüm 2:

Kümelerin eleman sayıları $1-1-4$, $1-2-3$ ve $2-2-2$ olabilir. $\dfrac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{4}}{2!} + \binom{6}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{3} + \dfrac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = 15+60+15 = 90.$

Cevap: A

4. x, y, z gerçel sayılar olmak üzere, $2x^2 + 5y^2 + 10z^2 - 2xy - 4yz - 6zx + 3$ ifadesinin alabileceği en küçük değer aşağıdakilerden hangisidir?

(A) 0 **(B)** 3 **(C)** -3 **(D)** 1 **(E)** Hiçbiri

Çözüm

Bu tip sorularda amaç, ifadeyi tam kare çarpanlara ayırmaktır. Neden böyle olduğunu birazdan daha iyi anlayacaksınız.

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (4y^2 - 4yz + z^2) + (x^2 - 6xz + 9z^2) + 3 = (x-y)^2 + (2y-z)^2 + (x-3z)^2 + 3$$

$(x-y)^2 \geq 0$, $(2y-z)^2 \geq 0$ ve $(x-3z)^2 \geq 0$ olduğu için $(x-y)^2+(2y-z)^2+(x-3z)^2+3 \geq 3$ elde edilir. Yani cevabın ≥ 3 olduğunu biliyoruz. Peki 3 olabilir mi? Bunun için eşitsizliklerdeki eşitlik kısımlarını ortak çözmek gerekecek.

$$\begin{aligned} x-y &= 0 \\ 2y-z &= 0 \\ x-3z &= 0 \end{aligned}$$

Açık şekilde $x = y = z = 0$ bir çözüm. Bu durumda $(x-y)^2 + (2y-z)^2 + (x-3z)^2 + 3 = 3$ elde edilir.

Cevap: B

5. Köşegenlerinin kesişim noktası E ile gösterilmek üzere, bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$, $m(\widehat{BCD}) = 150°$, $|BE| = x$, $|ED| = y$ ve $|AC| = z$ ise, y nin x ve z cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

(A) $\dfrac{z-x}{\sqrt{3}}$ **(B)** $\dfrac{z-2x}{3}$ **(C)** $z + x\sqrt{3}$ **(D)** $\dfrac{z-2x}{2}$ **(E)** $\dfrac{2z-3x}{2}$

Çözüm 1:

$\angle B = \angle D$ ve dörgen kirişler dörtgeni olduğu için AC çaptır. O bu kirişler dörtgeninin çevrel merkezi olsun. $\angle BOD = 2 \cdot \angle BAD = 2 \cdot (180° - 150°) = 60°$ olacağından $\triangle BOD$ bir eşkenar üçgendir. Bu durumda çemberin yarıçapı $OB = OD = BD = x + y$, çapı $z = 2(x+y) = 2x + 2y \Rightarrow y = \dfrac{z-2x}{2}$ çıkar.

Çözüm 2:

$\triangle BCD$'de Sinüs teoreminden $\dfrac{BD}{\sin 150°} = 2R \Rightarrow \dfrac{x+y}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow x + y = R$ elde edilir. AC çap olduğu için $z = 2x + 2y \Rightarrow y = \dfrac{z-2x}{2}$ elde edilir.

Çözüm 3:

AC'nin çap olduğu gerçeğini yakalayamadığımızı varsayarsak: $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$ olsun. $\triangle BCD$'de Sinüs teoreminden

$$\frac{BD}{\sin 150°} = \frac{BC}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{x+y}{\frac{1}{2}} = \frac{BC}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{BC}{2x+2y}$$

Aynı zamanda $\triangle ABC$ dik üçgeninde $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BC}{z}$ olduğu için, $z = 2x + 2y \Rightarrow y = \dfrac{z-2x}{2}$ elde edilir.

Cevap: D

6. $x^3 - 5x^2 - 22x + 56 \equiv 0 \pmod{p}$ denkliğinin kaç p asal sayısı için $0 \le x \le p$ olmak üzere üç farklı tam sayı kökü yoktur?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** Hiçbiri

Çözüm

3. dereceden denklemlerin çözümünde genel bir yol olan son terimin çarpanlarından yararlanalım.
$2^3 - 5 \cdot 2^2 - 22 \cdot 2 + 56 = 8 - 20 - 44 + 56 = 0$ olacağı için $x = 2$ bir çözümdür. Polinom bölmesi yaparak diğer kökleri de bulabiliriz. Sonuçta $(x-2)(x-7)(x+4)$ elde edilir.

$$(x-2)(x-7)(x+4) \equiv 0 \pmod{p}$$

denkliğinin çözüm kümesi $\{2, 7, -4\}$ tür. Bu elemanlardan ikisi $\bmod p$ de birbirine denk ise, denkliğin üç farklı kökü yoktur. Aksi halde denkliğin üç farklı kökü olacaktır.

$$\begin{aligned} 2 &\equiv 7 \pmod{p} \Rightarrow 0 \equiv 5 \pmod{p} \Rightarrow p = 5 \\ 2 &\equiv -4 \pmod{p} \Rightarrow 6 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 2 \text{ veya } p = 3 \\ 7 &\equiv -4 \pmod{p} \Rightarrow 11 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 11 \end{aligned}$$

Bu durumda $p \in \{2, 3, 5, 11\}$ için denkliğin üçten az farklı kökü vardır.

Cevap: D

7. Alınan herhangi n küme arasında birbirini içermeyen en az 3 tane veya herhangi ikisinden biri diğerini içeren en az 3 tane küme bulunmasını garanti eden en küçük n tam sayısı nedir?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

Çözüm:

Soruda istenen $p \vee q$ ifadesinin tersi $p' \wedge q'$ dir. Dört küme arasından birbirini içermeyen en fazla 2 tane ve herhangi ikisinden biri diğerini içermeyecek en fazla 2 tane küme bulunan tek bir konfigürasyon vardır: $A \subset B$, $C \subset D$ (Kolaylık olması açısından $A \cap C = \{\}$ ve $B \cap D = \{\}$ kabul edebiliriz.). Görüldüğü gibi 4 küme olduğunda soruda verilen şartı sağlamayan bir konfigürasyon bulunabiliyor. Bu konfigürsayona bir E kümesi eklediğinizde bu küme A ya da C kümelerinden birinin alt kümesi ya da B ya da D kümelerden birini içeriyorsa herhangi ikisinden biri diğerini içeren 3 küme bulunmuş olacak, değilse A, C, E kümeleri birbirini içermeyen 3 küme olacak. Bu durumda alınan herhangi 5 küme arasından sorudaki şart kesinlikle sağlanır.

Cevap: B

8. (a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve $n \ge 1$ için $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1 + 4a_n^2}}$ şeklinde tanımlanıyor. $a_k < 10^{-2}$ eşitsizliğini gerçekleyen en küçük k değeri nedir?

(A) 2501 **(B)** 251 **(C)** 2499 **(D)** 249 **(E)** Hiçbiri

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+4a_n^2}}{a_n} &= \frac{1}{a_{n+1}} \\ \frac{1+4a_n^2}{a_n^2} &= \frac{1}{a_{n+1}^2} \\ \frac{1}{a_n^2} + 4 &= \frac{1}{a_{n+1}^2} \\ 4 &= \frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \end{aligned}$$

Denklemin genel terimini bulmak için, son bulduğumuz eşitliği a_1'e kadar devam ettirelim.

$$\begin{aligned}
4 &= \frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{n-1}^2} \\
4 &= \frac{1}{a_{n-1}^2} - \frac{1}{a_{n-2}^2} \\
&\vdots \\
4 &= \frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \\
4(n-1) &= \frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_1^2} \\
4(n-1)+1 &= \frac{1}{a_n^2} \\
a_n^2 &= \frac{1}{4n-3} \\
a_n &= \frac{1}{\sqrt{4n-3}}
\end{aligned}$$

$a_k = \dfrac{1}{\sqrt{4k-3}} < 10^{-2} \Rightarrow 100 < \sqrt{4k-3} \Rightarrow 10003 < 4k \Rightarrow 2500 + \frac{3}{4} < k$ olur. Yani verilen şartı sağlayan en küçük k değeri 2501 dir.

Çözüm 2:

Yine test mantığı ile hareket edeceğiz.
$a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $a_3 = \dfrac{1}{\sqrt{9}}$, $a_4 = \dfrac{1}{\sqrt{13}}, \ldots$ şeklinde devam ediyor. Buradan genel terimi $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{4n-3}}$ şeklinde bulduktan sonra, Çözüm 1'deki işlemleri yapacağız.

Cevap: A

9. Birbirine dıştan teğet olan $[AB]$ ve $[BC]$ çaplı iki çemberin merkezleri, sırasıyla D ve E ile; A noktasından E merkezli çembere ve C noktasından D merkezli çembere (AC doğrusuna göre aynı tarafta kalacak şekilde) çizilen teğetlerin kesişim noktası F ile gösterilmek üzere, $|DB| = |BE| = \sqrt{2}$ ise, AFC üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

(A) $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ **(C)** $4\sqrt{2}$ **(D)** $2\sqrt{3}$ **(E)** $2\sqrt{2}$

Çözüm:

Çemberler eş olduğu için FB, $\triangle AFC$'de simetri eksenidir. CF, D merkezli çembere T'de dokunsun. $\triangle TDC$ dik üçgeninde $DT = \sqrt{2}$, $DC = 3\sqrt{2}$ olduğu için Pisagordan $TC = 4$ ve $\tan\angle TCD = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ elde edilir. $\triangle FBC$ dik üçgeninde $\tan\angle BCF = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ olacağı için $FB = 1$ ve $Alan(AFC) = \dfrac{1 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ olarak bulunur.

Cevap: E

10. p ve q tek sayıları asal sayılar dizisinin ardışık iki terimi olsun. $p+q$ sayısının farklı pozitif bölenlerinin sayısı en az kaç olabilir?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

Çözüm 1:

Tek asal sayıların toplamı bir çift sayıdır. $k > 1$ olmak üzere; $p + q = 2k = 2^1 k^1$ sayısının da pozitif bölen sayısı en az $2 \times 2 = 4$ olacaktır. Bu son söylediğimiz şey, kısmen yanlış. Neden? $m \geq 1$ olmak üzere; $k = 2$ olma durumunda, $2k = 4m$ olacağından bu ifadenin pozitif bölen sayısı $(2+1) = 3$ tür. Belki de bu şekilde iki asal sayı yoktur. 3 pozitif bölen olduğu için $m = 1$ yani $p + q = 4$ olması gerekir. Bu şekilde ardışık iki asal sayı yoktur. O zaman 4 pozitif bölen için araştırma yapalım. $3 + 5 = 8 = 2^3$ sayısı $(3+1) = 4$ pozitif bölene sahip. Gerçi soruyu çözerken düşünmediğimiz bir olasılıktan bulduk sonucu. 3'ten az olamayacağını gösterdik, 3 olamayacağını gösterdik. 4'e bir örnek bulduk. O zaman cevap 4'tür.
Aslında $p + q = 2k$'nın 4 böleni olması için ya $k = 4$ olacak, ya da k bir asal sayı olacak. $k = 4$ için $p = 3, q = 5$ asal

sayıları bulunabilir.
k asal sayı ise, $p+q=k+k$ olacağı için k'nın p ile q arasında bir asal sayı, yani $p<k<q$ olması gerekir. Bu da soru da verilen p,q ardışık iki asal sayı ifadesine ters düşer. Yani, anlayacağınız, $p+q$ ifadesinin 4 pozitif böleninin olmasını sağlayanan tek (p,q) asal ikilisi $(3,5)$'tir.

Çözüm 2:
$p+q\geq 8$ çift sayısının bölenlerinden bazıları kabaca $1,2,\dfrac{p+q}{2},p+q$ dir. 4'ten daha az böleni olması için $\dfrac{p+q}{2}=2\Rightarrow p+q=4$ olması gerekir. Asal sayılar dizisinin en küçük iki tek elemanı 3 ve 5 olduğu için $p+q\geq 8$ olacağıdan pozitif bölenler en azından $1,2,4,8$ olacaktır. Bu durumda 4 pozitif bölenli $p+q$ sayısı vardır; fakat 3 bölenli yoktur.

Cevap: C

11. Bir kübün yüzlerine $1,2,3,4,5,6$ sayılarını işaretleyerek bir zar yapmak istiyoruz. Ortak bir ayrıta sahip iki yüze komşu yüzler dersek, ardışık sayıların komşu yüzler üstünde yer alması koşuluyla, bu zarı kaç değişik biçimde yapabiliriz?

(A) 10 **(B)** 14 **(C)** 18 **(D)** 56 **(E)** Hiçbiri

Çözüm:
1 ve 2 yi yerleştirdikten sonra küpü açalım.

	1	
	2	
A	B	C
	D	

$A=3$ ve $B=4$ ise (C,D) ikilisi $(5,6)$ ya da $(6,5)$ olabilir.
$A=3$ ve $D=4$ ise (B,C) ikilisi $(5,6)$ ya da $(6,5)$ olabilir.
Bu durumda $A=3$ ise 4 farklı diziliş var. Benzer şekilde $C=3$ için 4 farklı diziliş olabilir.
$B=3$ ise $D=4$ olamaz; çünkü (A,C) ikilisi komşu değil. Bu durumda $B=3$ ve $A=4$ ise $(C,D)=(6,5)$ olmalı.
$B=3$ ve $C=4$ için ise $(A,D)=(6,5)$ olacak.
Yani toplamda $4+4+2=10$ farklı diziliş mümkün.

Cevap: A

12. Bir dik üçgende hipotenüsün uzunluğunun çevreye oranının alabileceği tüm değerler gerçel sayılar ekseninde bir aralık oluşturur. Bu aralığın orta noktası nedir?

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}$ **(B)** $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ **(C)** $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{4}$ **(D)** $\sqrt{2}-1$ **(E)** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

Çözüm:

Hipotenüs c ve diğer kenarlar a,b olsun. Pisagordan

$$c^2=a^2+b^2\geq 2ab\Rightarrow 2c^2\geq c^2+2ab=(a+b)^2\Rightarrow c\sqrt{2}\geq a+b$$

ve üçgen eşitsizliğinden

$$a+b>c$$

elde edilir. Eşitsizliklerin her iki tarafına c eklersek

$$c+c\sqrt{2}\geq a+b+c\Rightarrow \frac{c}{a+b+c}\geq\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

ve

$$a+b+c>2c\Rightarrow \frac{1}{2}>\frac{c}{a+b+c}=$$

elde edilir. $(\frac{1}{1+\sqrt{2}},\frac{1}{2}]$ aralığının orta noktası

$$\frac{\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{3+\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$$

olur. Dikkat edilirse alt sınır üçgen ikiz kenar dik üçgen iken, üst sınır da üçgen dejenere iken yani açılarından biri $0°$ iken elde ediliyor.

Cevap: C

13. Yüksekliklerinin kesişim noktası H olmak üzere, bir ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = \alpha$ ve A, H, C noktalarından geçen çemberin merkezi O ise, HOC açısının α cinsinden ölçüsü nedir?

(A) $90° - \alpha$ **(B)** $90° + \dfrac{\alpha}{2}$ **(C)** $180° - \alpha$ **(D)** $180° - \dfrac{\alpha}{2}$ **(E)** $180° - 2\alpha$

Çözüm:
$\angle HAC = 90° - \angle B = 90° - \alpha$. $\angle HOC = 2 \cdot \angle HAC = 2 \cdot (90° - \alpha) = 180° - 2\alpha$.

Cevap: E

14. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{30}$ denkliğinin $0 \le x < 30$ olacak şekilde kaç farklı tam sayı çözümü vardır?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Çözüm:
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ olduğu için mod 2, mod 3, mod 5 te denkliği inceleyeceğiz.
3 modda da $x \not\equiv 0$ olduğu aşikar.
mod 2 için, $x \equiv 1 \pmod 2$.
Fermat'ın küçük teoreminden $x^2 \equiv 1 \pmod 3$ olacağı için,

$$x^2 \cdot x^2 + 2x \cdot x^2 + 3x^2 - x + 1 \equiv 1 + 2x + 3 - x + 1 \equiv 2 + x \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod 3$$

elde edilir. Yine Fermat'ın küçük teoreminde $x^4 \equiv 1 \pmod 5$ olacağı için,

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x + 1 \equiv 2x^3 - 2x^2 - x + 2 \equiv 0 \pmod 5$$

denkliğini sağlayan değerleri araştıracağız. Sırasıyla 1, 2 ve $4 \equiv -1 \pmod 5$ için denkliğin sağlanmadığını görelim. $x \equiv 3 \pmod 5$ için $2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 3 + 2 \equiv 4 + 2 - 3 + 2 \equiv 0 \pmod 5$ elde edilir ki, $x \equiv 3 \pmod 5$ denkliğin tek kökü olur. Son durumda

$$x \equiv 1 \pmod 2, x \equiv 1 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 5$$

denkliklerinin ortak çözümü $x \equiv 13 \pmod{30}$ dur.
13 sayısını şöyle buluyoruz. $x + 2$ sayısı hem 3 ile bölümüyor, hem de 5 ile bölünüyor. Bu durumda $x = 13$ ya da $x = 28$ olacaktır. $x \equiv 1 \pmod 2$ olduğu için $x = 13$ tür.
Ama soruyu çözerken, 13 sayısını bulmamız şart değil. Çinlilerin Kalan Teoremine göre $2, 3, 5$ sayıları ikişerli olarak aralarında asal oldukları için mod $2 \cdot 3 \cdot 5$ yani mod 30 da söz konusu denklik sisteminin bir çözümü vardır.

Cevap: B

15. 12 evli çift yuvarlak bir masanın etrafında, erkeklerin hepsi masanın bir tarafında yan yana, her kadın da eşinin tam karşısında olacak şekilde oturmaktadır. Masada oturanlar, her seferinde yan yana oturan bir kadınla bir erkeğin yer değiştirmesi suretiyle, tüm eşler yan yana gelinceye kadar yer değiştirir. Bunun için en az kaç yer değiştirme işlemi yapılmıştır?

(A) 36 **(B)** 55 **(C)** 60 **(D)** 66 **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

E_1'i K_1 ile kavuşuncaya kadar yer değiştirelim.
$E_1 \leftrightarrow K_{12}, K_{11}, \dots K_2$ şeklinde toplam 11 yer değiştirme gerekecek.
Şimdi de aynı şeyi E_2 için yapalım.
$E_2 \leftrightarrow K_{12}, K_{11}, \dots K_3$ şeklinde toplam 10 yer değiştirme gerekir.

$$\vdots$$

$E_{10} \leftrightarrow K_{12}, K_{11}$, 2 yer değiştirme gerektirirken,
$E_{11} \leftrightarrow K_{12}$ ile 1 yer değiştirme ile eşine kavuşacaktır.
Tüm bunları toplarsak $1 + 2 + \cdots + 11 = \dfrac{11 \cdot 12}{2} = 66$ yer değiştirme elde ederiz. 66 yer değiştirme ile tüm eşleri

yan yana oturttuk. Ama daha az sayıda yer değiştirme ile oturtabililir miyiz? Buna cevap vermemiz gerekiyor. $|E_iK_i|$ ile eşlerin birbirinden uzaklığını gösterelim. Başlangıçta her çift için $|E_iK_i| = 12$. Son durumda bunun $|E_iK_i| = 1$ olmasını istiyoruz. Başlangıçta $\sum_{i=1}^{12} |E_iK_i| = 144$ iken son durumda $\sum_{i=1}^{12} |E_iK_i| = 144$ olmalı.
Her seferinde yer değiştirdiğimiz $E_x \leftrightarrow K_y$ ikilisi eşlerine en fazla 1 birim yaklaşıyorlar. Bu durumda seferinde $\sum_{i=1}^{12} |E_iK_i|$ toplamı en fazla 2 birim küçülebilir. Bu takdirde, toplam değerinin 144 ten 12 ye düşmesi için en az $\dfrac{144-12}{2} = 66$ adım gerekir. 66 adımda soruda istenen yer değiştirmeyi yapabildiğimize göre cevap 66 dır.

Cevap: D

16. x, y, z sayıları

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z &= 15 \\ x + y + z^2 &= 27 \\ xy + yz + zx &= 7 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlıyorsa, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(A) $3 \le |x+y+z| \le 4$
(B) $5 \le |x+y+z| \le 6$
(C) $7 \le |x+y+z| \le 8$
(D) $9 \le |x+y+z| \le 10$
(E) Hiçbiri

Çözüm:
Üçüncü denklemi 2 ile genişletip denklemleri taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z + x + y + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx &= 15 + 27 + 2 \cdot 7 \\ (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz) + (x+y+z) &= 56 \\ (x+y+z)^2 + (x+y+z) &= 56 \end{aligned}$$

elde edilir. $x+y+z = S$ dersek, $S^2+S-56 = 0$ eşitliğinin çözüm kümesi $\{7, -8\}$ olur. Bu durumda $|S| = |x+y+z| = 7$ veya $|S| = 8$ olacağı için $7 \le |x+y+z| \le 8$ eşitsizliği doğru olacaktır.

Cevap: C

17. Bir ABC üçgeninde A açısının iç açıortayı ile $[BC]$ nın kesişim noktası D; $[CB$ ışını üzerinde $|DE| = |DB| + |BE|$ özelliğinde bir nokta E; A, D, E noktalarından geçen çemberin AB doğrusunu ikinci kez kestiği nokta F ile gösterilmek üzere, $|BE| = |AC| = 7$, $|AD| = 2\sqrt{7}$ ve $|AB| = 5$ ise, $|BF|$ nedir?

(A) $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ **(B)** $\sqrt{7}$ **(C)** $2\sqrt{2}$ **(D)** 3 **(E)** $\sqrt{10}$

Çözüm:

$BD = 5k$ ise $DC = 7k$ dır. B noktasının kuvvetini alırsak

$$EB \cdot BC = AB \cdot BF \Rightarrow 7 \cdot 5k = 5 \cdot BF \Rightarrow BF = 7k$$

elde edilir. Açıortay teoreminden

$$AB \cdot AC - BD \cdot DC = AD^2 \Rightarrow 35 - 35k^2 = 28 \Rightarrow 7 = 35k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow BF = 7k = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

Cevap: A

18. $p_1 < p_2 < \cdots < p_{24}$, $[3, 100]$ aralığındaki asal sayıları göstermek üzere,

$$\sum_{i=1}^{24} p_i^{99!} \equiv a \pmod{100}$$

denkliğini gerçekleyen en küçük $a \ge 0$ sayısı nedir?

(A) 24 **(B)** 25 **(C)** 48 **(D)** 50 **(E)** 99

Çözüm:
Euler Teoreminden $(a,100)=1$ olmak üzere, $a^{\phi(100)} \equiv 1 \pmod{100}$ elde edilir. $\phi(100)=100\cdot(1-\dfrac{1}{2})\cdot(1-\dfrac{1}{5})=40$ olduğu için $a^{40}\equiv 1 \pmod{100}$ olur. $40|99!$ olduğu için de $a^{99!}\equiv 1 \pmod{100}$ olacaktır. Bu durumda $p_2=5$ hariç diğer 23 asal sayı 100 ile aralarında asal olduğu için mod 100 de 1 kalanını verirler. 5 i özel olarak inceleyeceğiz.
$i>1$ tam sayısı için $5^i\equiv 25 \pmod{100}$ olacağından, $5^{99!}\equiv 25 \pmod{100}$ elde edilir.
Son durumda $25+23\cdot 1=48$ aradığımız yanıt olacaktır.

Cevap: C

19. Bir torbada 3 ü mavi 22 si siyah toplam 25 top vardır. Ahmet, 1 ve 25 arasında bir n tams sayısı seçer. Betül, torbadan birer birer ve geriye koymaksızın rastgele n tane top çeker. Çekilen n toptan tam olarak ikisi maviyse ve bunlardan ikincisi n inci sırada çekilmişse Ahmet, aksi halde ise, Betül oyunu kazanır. Oyunu kazanma olasılığını mümkün olduğu kadar yükseltebilmek için, Ahmet hangi n sayısını seçmelidir?

(A) 2 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13 **(E)** 23

Çözüm:
$P(n=2)=\dfrac{3\cdot 2}{25\cdot 24}$ olur. $n\geq 3$ için $\dfrac{3}{25}\cdot\dfrac{22}{24}\cdot\dfrac{21}{23}\cdots\dfrac{25-n}{27-n}\cdot\dfrac{2}{26-n}$ gibi bir olasılık elde edeceğiz. İlk mavi top $n-1$ yerden birine gelebileceği için

$$P=(n-1)\cdot\frac{3\cdot 2\cdot(25-n)}{25\cdot 24\cdot 23}=\frac{3\cdot 2}{25\cdot 24}\cdot\frac{(n-1)(25-n)}{23}$$

olur. $(n-1)(25-n)$ ifadesi en büyük değerini $n-1=25-n$ olduğu zaman yani $n=13$ te alır. Burada yaptığımız şey, toplamları sabit olan iki sayı en büyük değerini sayılar eşitken alır. Bunu görmenin diğer bir yolu da $AO\geq GO$ eşitsizliği:

$$\frac{(n-1)+(25-n)}{2}\geq\sqrt{(n-1)(25-n)}\Rightarrow 13\geq\sqrt{(n-1)(25-n)}\Rightarrow 169\geq(n-1)(25-n)$$

ve eşitlik $n-1=25-n$ iken sağlanır. Yani P yi maksimize en eden n değeri 13 tür.

Cevap: D

20. $x^3 3^{1/x^3}+\dfrac{1}{x^3}3^{x^3}=6$ denkleminin kaç farklı gerçel çözümü vardır?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** Sonsuz çoklukta **(E)** Hiçbiri

Çözüm:
$x<0$ için sol taraf negatif olacağı için denklemin negatif kökü yoktur.
$x\geq 0$ için, $AO\geq GO$ uygularsak

$$\frac{6}{2}=\frac{x^3 3^{1/x^3}+\dfrac{1}{x^3}3^{x^3}}{2}\geq\sqrt{x^3 3^{1/x^3}\cdot\frac{1}{x^3}3^{x^3}}=\sqrt{3^{x^3+\frac{1}{x^3}}}\geq\sqrt{3^2}=3$$

elde edilir. Bu durumda iki kez $AO\geq GO$ kullandığımız için, hem $x^3 3^{1/x^3}=\dfrac{1}{x^3}3^{x^3}$ hem de $x^3=\dfrac{1}{x^3}$ olmalı. İkincisi birincisini gerektireceğinden $x=\pm 1$ elde edilir. Negatif olamayacağı için eşitlik durumu sadece $x=1$ iken sağlanır.

Cevap: E

21. ABC dar açılı bir üçgen, D ve E sırasıyla $[AC]$ ve $[AB]$ üzerinde $m(\widehat{ADB})=m(\widehat{AEC})=90^\circ$ koşulunu sağlayan noktalar; AED üçgeninin çevresi 9 ve çevrel çemberinin yarıçapı $\frac{9}{5}$ olmak üzere, ABC üçgeninin çevresi 15 ise, $|BC|$ aşağıdakilerden hangisidir?

(A) 5 **(B)** $\dfrac{24}{5}$ **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** $\dfrac{48}{5}$

Çözüm:
$BCDE$ kirişler dörtgeni olduğu için

$$\angle ABC=\angle ADE \text{ ve } \angle ACB=\angle AED$$

olacaktır. Bu durumda $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ dir ve benzerlik oranı $\dfrac{9}{15}$ tir.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\angle A = \frac{4}{5}$$

Çevrel çemberlerin yarıçapları oranı da benzerlik oranına eşit olacağından, (ABC) nin yarıçapı için

$$\frac{\frac{9}{5}}{R} = \frac{9}{15} \Rightarrow R = 3$$

elde edilir. $\triangle ABC$ de Sinüs Teoreminden

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R \Rightarrow R = \frac{24}{5}$$

çıkar.

Cevap: B

22. $(x_1x_2\ldots x_{1998})$, ondalık sistemde 1998 basamaklı bir sayının gösterimi olmak üzere, $(x_1x_2\ldots x_{1998}) = 7\cdot 10^{1996}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{1998})$ denklemini sağlayan kaç $(x_1x_2\ldots x_{1998})$ sayısı vardır?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Çözüm:

Açık bir şekilde

$$(x_1x_2\ldots x_{1998}) \equiv 7\cdot 10^{1996}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{1998}) \equiv 0 \pmod{10^{1996}}$$

olduğu görülüyor. Bu durumda

$$x_3 = x_4 = \cdots = x_{1998} = 0$$

olur ve soru

$$(x_1x_200\ldots 0) = 7\cdot 10^{1996}(x_1 + x_2)$$

halini alır.

$$x_1 10^{1997} + x_2 10^{1996} = 7\cdot 10^{1996}(x_1 + x_2) \Rightarrow 10x_1 + x^2 = 7x_1 + 7x_2 \Rightarrow 3x_1 = 6x_2 \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

Bu şartı sağlayan (x_1, x_2) ikililerinin kümesi $S = \{(2,1),(4,2),(6,3),(8,4)\}$ ve $|S| = 4$ olacaktır.

Cevap: E

23. $n\times n(n \geq 7)$ satranç tahtasında oynanan iki kişilik bir oyunda Ahmet'in bir, Betül'ün ise iki taşı vardır. İlk olarak Ahmet taşını n^2 kareden birine yerleştirir. Sonra Betül, tahtanın kenarındaki karelerden boş olan ikisine taşlarını yerleştirir. Taşlar yerleştirildikten sonra Ahmet ile başlayarak sıra ile hamle yaparlar. Ortak bir kenara sahip iki kenara komşu kareler diyelim. Ahmet, hamle sırası kendine geldiğinde taşını bulunduğu kareden ya boş olan bir komşu kareye sürer ya da tahtanın kenarındaki karelerden birinde bulunuyorsa tahtanın dışına çıkarır. Betül ise, her iki taşını da bulundukları karelerden komşu karelere sürer. Betül'ün taşlarını sürdüğü karelerden birinde Ahmet'in taşı varsa Betül Ahmet'in taşını yer ve oyunu kazanır. Taşını, yenmeden tahtanın dışına çıkartabildiği takdirde ise, oyunu Ahmet kazanır. Ahmet'in oyunu kazanmasını garanti etmek için taşını ilk başta yerleştirebileceği karelerin sayısı nedir?

(A) 0 **(B)** n^2 **(C)** $(n-2)^2$ **(D)** $4(n-1)$ **(E)** $2n-1$

Çözüm:

Ahmet taşını tahtanın kenarlarına koyarsa, oyuna o başlayacağı için oyunu kesinlikle kazanır.
Ahmet taşını tahtanın kenarları dışında bir kareye koyarsa, Betül taşlarını Ahmet'in taşını çapraz olarak şıkıştıracak şekilde koyar.

Cevap: D

24. $x^6-2x^4+x^2=A$ denkleminin farklı gerçel çözümlerinin sayısını $n(A)$ ile gösterelim. A tüm gerçel değerleri aldığında $n(A)$ nın alacağı değerlerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

(A) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ **(B)** $\{0,2,4,6\}$ **(C)** $\{0,3,4,6\}$ **(D)** $\{0,2,3,4,6\}$ **(E)** $\{0,2,3,4\}$

Çözüm:
$f(x)=g(x)$ denkleminin çözüm kümesi $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ denklemlerinin grafiklerinin kesiştiği noktalardır. Bu durumda $x^6-2x^4+x^2=x^2(x^4-2x^2+1)=x^2(x^2-1)^2=A$ denkleminin çözüm kümesi $y=x^2(x^2-1)^2$ ile $y=A$ grafiklerinin kesiştikleri noktalar olacak. $y=x^2(x^2-1)^2$ denkleminin kökleri $\{-1,0,1\}$ dir. Tüm bu kökler katlı köktür. Yani bu noktalara gelince fonksiyon artan-azalan durumunu değiştirir. Bu durumda
$y=A<0$ için denklemin hiç kökü yoktur.
$y=A=0$ için denklemin 3 kökü vardır.
Yeterince büyük A'lar için denklemin 2 kökü vardır.
$y=x^2(x^2-1)^2$ fonksiyonu $(-1,0)$ ile $(0,1)$ aralığında simetrik olduğu için eğrilerin tepe noktaları aynıdır. A bu tepe noktasının ordinat değerine eşit olduğunda denklemin 4 kökü olacaktır.
$(-1,0)$ aralığındaki tepe noktasını ile $y=0$ arasındaki değerler için denklemin 6 kökü olur.
Yani $n(A)=\{0,2,3,4,6\}$ dır.

Cevap: D

25. ABC bir üçgen; $|BC|>|BA|$ ve D bu üçgenin iç bölgesinde $m(\widehat{ABD})=m(\widehat{DBC})$ koşulunu sağlayan bir nokta olmak üzere, $m(\widehat{BDC})=150°$ ve $m(\widehat{DAC})=60°$ ise $m(\widehat{BAD})$ kaç derecedir?

(A) 45 **(B)** 50 **(C)** 60 **(D)** 75 **(E)** 80

Çözüm 1:

$[BA$ üzerinde $BE=BC$ olacak şekilde E noktası alalım. İkizkenar üçgenin tepe noktasından çıkan açıortay simetri ekseni olduğundan $\angle BDE=\angle BDC=150° \Rightarrow \angle EDC=60°$ ve $DE=DC$ dolayısıyla da $\triangle DEC$ eşkenardır. $\angle DAC=\angle DEC=60°$ olduğu için $ADCE$ kirişler dörtgenidir. Bu durumda $\angle DCE=\angle DAB=60°$ olur.

Çözüm 2:

$\triangle ABC$ üçgeninin iç merkezi için

$$\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2} = 90° + \angle IAC$$

bağıntısı vardır. $\angle IAC=60°$ ise $\angle BIC=150°$ olacaktır. $I\in [BD$ olduğu için D noktası için soruda verilen her özellik I noktası için de sağlanır. Bu durumda biraz da test mantığı ile $I=D$ kabul edip, $\angle BAI=\angle IAC=60°$ elde ederiz.

Cevap: C

26. $\sqrt{x+1998+\sqrt{x+1998+\sqrt{x+1997+\sqrt{x+1997+\cdots+\sqrt{x+1+\sqrt{x+1+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}}}}=y$ denklemini sağlayan kaç (x,y) sıralı tam sayı ikilisi vardır?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 1998 **(D)** 3996 **(E)** Sonsuz çoklukta

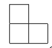
Çözüm:

İki tarafın karesini alıp, kök içerisinde olmayan ifadeleri sağa geçirelim. Sonra bu kare alma işini

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} = A \in \mathbb{Z}$$

elde edene kadar devam ettirelim. Bu işlemi bir adım daha ilerletirsek $\sqrt{x}=A^2-x\in\mathbb{Z}$ elde ederiz. Bu da x'in tam kare olmasını gerektirir. $T\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere; $x=T^2$ dersek, $x+\sqrt{x}=A \Rightarrow T^2+T=A^2$ olur. $T^2<A^2<(T+1)^2=T^2+2T+1$ ardışık iki tam kare arasında bir başka tam kare olamayacağı için bu şekilde bir $x=T^2$ tam sayısı yoktur.

Cevap: A

27. $\square$ birim kareyi göstermek üzere, istenilen sayıda  ve en çok bir tane $\square$ kullanarak aşağıdaki n tam sayılarından hangisi için $n \times n$ lik bir satranç tahtası kaplanamaz?

(A) 96 **(B)** 97 **(C)** 98 **(D)** 99 **(E)** 100

Çözüm:

2 tane L şekliyle 2×3 bölge kaplanabilir. Bu yolla $6k \times 6k$ şeklinde tahtalar sadece L şekilleriyle kaplanabilir. Bu durumda 96×96 seçeneği eleniyor.
98×98 tahtayı bir tane 96×96, iki tane 2×96, bir tane 2×2 alana bölelim. 96×96 nın kaplanabildiği gösterdik. 2 tane 2×3 ile 2×6 elde edileceği için 2×96 lık bölgeler de kaplanabilir. Bu durumda geriye sadece 2×2 lik bölge kaldı ki o da bir L şekli bir de tek kareyle kaplanabilir. 98 de elendi.
Benzer şekilde, 100×100 tahtayı bir tane 96×96, iki tane 4×96, bir tane 4×4 alana bölelim. 96×96 nın kaplanabildiği gösterdik. 2 tane 2×3 ile 4×3 elde edileceği için 4×96 lık bölgeler de kaplanabilir. Geriye 4×4 lük bölge kaldı. Köşelere L nin köşesi gelecek şekilde yerleştirme yapıyoruz. Ortada 2×2 lik bir alan kaldı. Bir L ve bir de tek kare ile bu kaplama da yapılabilir. 100 de elendi.
Geriye 97 ile 99 kaldı.
97×97 için bir tane 90×90, iki tane 7, bir tane 7×7 lik bölge oluşturuyoruz. 90×90 nın kaplanabileceği aşikar. 7×90 ı şöyle ele alıyoruz. 4×6 ları dizerek 4×90 lık kısmı, 3 leri dizerek 3 lık kısmı, toplamda 7×90 lık bölgeyi kaplamış oluyoruz. Bu durumda 7×7 lik bölgenin kaplanması kalıyor. 3×4 lük bölgeyi kaplayabiliyoruz. Bölgenin köşelerine saat yönünde 3×4, 4×3, 3×4 ve 4×3 lük kaplamaları yerleştirdiğimizde, ortada tek bir karelik boş yer kalıyor. Bu durumda 97×97 lik tahta da kaplanmış oldu.
Geriye tek bir şık kalıyor 99. 99'un kaplanamayacağını göstermek zor olabilir (en azından bana zor). 99×99 luk tahta için söyleyebileceğim tek şey $3|99$ olduğu için sadece L şekilleriyle kaplanmak zorunda olması.

Cevap: D

28. $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} - \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 1$ denkleminin farklı gerçel çözümlerinin sayısı nedir?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Çözüm:

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} = \sqrt{x-4+2\cdot 2\cdot\sqrt{x-4}+4} = \sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} = \sqrt{x-4}+2$$
$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1+2\cdot 1\cdot\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1$$

İkinci ifadeyi ilkinden çıkarısak

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} - \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-4} - \sqrt{x-1} + 1 = 1 \Rightarrow \sqrt{x-4} = \sqrt{x-1}$$

elde edilir. Bu eşitliğin ise çözümü yoktur. **Cevap: A**

29. $ABCD$ bir dışbükey dörtgen, $m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90°$, CD doğrusuna C noktasında teğet olan ve A, B noktalarından geçen çember ile $[AD]$ nın kesişim noktası E olmak üzere, $|BC| = 20$ ve $|AD| = 16$ ise, $|CE|$ nedir?

(A) 9 **(B)** $6\sqrt{2}$ **(C)** $4\sqrt{5}$ **(D)** $7\sqrt{2}$ **(E)** 10

Çözüm:

$BC \perp CD$ ve CD (ABC) çemberine teğet olduğu için BC çaptır. Çemberin merkezi O olsun. O dan AE ye inilen dikmenin ayağı F olsun. $AF = FE$ olduğu için

$$OC = FD = 10 \Rightarrow AF = AD - FD = 16 - 10 = 6$$

elde edilir. $\triangle OAF$ dik üçgeni $6-8-10$ üçgeni olduğu için $OF = CD = 8$ ve $\triangle ECD$ dik üçgeninde

$$EC^2 = CD^2 + ED^2 \Rightarrow EC^2 = 4^2 + 8^2 = 80 \Rightarrow EC = 4\sqrt{5}$$

olarak bulunur.

Cevap: C

30. $m = (abab)$ ve $n = (cdcd)$ ondalık sistemde dört basamaklı sistemde dört basamaklı iki tam sayının gösterimi olsun. $m + n$ sayısının tam kare olmasını sağlayan (m, n) çiftleri için, $a \cdot b \cdot c \cdot d$ çarpımı en çok kaç olabilir?

(A) 392 **(B)** 420 **(C)** 588 **(D)** 600 **(E)** 750

Çözüm:

$$\begin{aligned} m+n &= (1000a+100b+10a+b)+(1000c+100d+10c+d) \\ &= 1010a+101b+1010c+101d \\ &= 101(10a+b+10c+d) \\ &= 101(\overline{ab}+\overline{cd}) \\ 101(\overline{ab}+\overline{cd}) &= T^2 \Rightarrow (\overline{ab}+\overline{cd}) = 101k^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $20 \leq \overline{ab}+\overline{cd} \leq 198$ olacağı için de $k=1$ ve $\overline{ab}+\overline{cd} = 101$ olur.

$$2 \leq b+d \leq 18 \Rightarrow 101-18 = 83 \leq 10(a+c) \leq 99 \Rightarrow 10(a+c) = 90 \Rightarrow a+c = 9 \Rightarrow b+d = 11$$

$a \cdot b \cdot c \cdot d$ ' yi maksimize etmek için a ile c, b ile de d de birbirine çok yakın olmalı. Bunun nedeni toplamları sabit olan $(a+c=9)$ iki sayının çarpımı en büyük değerini sayılar eşit $(a=b)$ iken alır. Bu $AO \geq GO$ nun bir sonucudur. Bu durumda

$$\{a,c\} = \{4,5\}, \{b,d\} = \{5,6\} \Rightarrow \max\{a \cdot b \cdot c \cdot d\} = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 = 600$$

olur.

Cevap: D

31. m sütun ve n satırı olan bir satranç tahtasında iki kişilik bir oyun oynanıyor. Her iki oyuncunun da birer taşı olup, başlangıçta birinci oyuncunun taşı tahtanın sol üst köşesindeki, ikinci oyuncununki ise, tahtanın sağ alt köşesindeki karedir. Ortak bir kenara sahip iki kare komşu sayılmak üzere, hamle sırası gelen oyuncu, taşını bulunduğu karenin komşularından birine sürer. Sürdüğü karede diğer oyuncunun taşı varsa, onu yiyerek oyun dışı bırakır. Oyunu, diğer oyuncunun taşını yiyen veya taşını, diğer oyuncunun taşının başlangıçta bulunduğu sıraya önce ulaştıran oyuncu kazanır. İlk hamleyi birinci oyuncu yaparsa, aşağıdaki (m, n) sıralı ikililerinden hangisi için ikinci oyuncunun oyunu kazanmasını garanti eden bir strateji vardır?

(A) $(1998, 1997)$ **(B)** $(1998, 1998)$ **(C)** $(997, 1998)$ **(D)** $(998, 1998)$ **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

Soruda "diğer oyuncunun taşının başlangıçta bulunduğu sıraya önce ulaştıran" gibi bir ifade var. Aslında "sıra" yerine "satır" denmesi gerekirdi. Sıra aynı zamanda sütunu da tanımlayabileceği için ilk oyuncu her zaman tahtanın kenarlarından birine ikinci oyuncudan önce varabilir. Cevap anahtarında D seçeneği doğru şık olarak verildiği için, soruda "sıra" ifadesinden maksadın "satır" olduğu sonucu çıkar.

$n \leq m$ olduğu durumlarda birinci oyuncu her zaman dikine hareket ederse oyunu kazanır.

$m = 997, n = 1998$ durumu için, tahtayı satranç tahtasında olduğu gibi damalı (siyah-beyaz) şekilde boyayalım. Sol üst köşe beyazsa, sağ alt köşe siyah olacaktır. İlk hamle sonunda birinci oyuncu siyah kareye geçecek, bu durumda ikinci oyuncu siyah karede olduğu için birinci oyuncunun taşını yiyemez. Bu durum sonraki hamleler için de geçerli olacak. $m = 997, n = 1998$ için ikinci oyuncunun birinci oyuncunun taşını yeme ihtimali yok. Birinci oyuncuda, ilk başlama avantajı da olduğu için oyunu her zaman kazanabilir.

$m = 998, n = 1998$ durumu için ise, sol üst köşe beyazsa, sağ alt köşe de beyaz olacak. Bu durumda, birinci oyuncu her zaman farklı renkteki kareye hareket etmek zorunda olduğu için ikinci oyuncuyu hiçbir zaman yiyemeyecek. Bu durumda yeme avantajı, ikinci oyuncu da oluyor. Bakalım, ikinci oyuncu bu avantajını nasıl fırsata dönüştürecek.
İkinci oyuncu ilk olarak birinci oyuncuyla aynı sütunda yer alana kadar yatay hareket yapacak. Bu durumda, bu kadar yatay hareketle oyunu kazanmak için rakibinin taşını yemesi gerekecek. Bu aşamadan sonra, rakibiyle arasındaki dikey farkı yavaş yavaş kapatmaya başlayacak. Rakibi bu durumdan kurtulmak için yatay hareketler yapacak. Normalde yatay hareketlerin takibi gerekir; ama birinci oyuncu bir sağa bir sola giderek oyunu kilitleyebileceği için, sütun takibi için daha farklı bir strateji gerekir. İkinci oyuncu birinci oyuncu ile sütunu eşitledikten sonra, birinci oyuncunun yatay harektine ilk başta dikey hareketle tepki verecek. Birinci oyuncu bir önceki adımda yaptığı yatay harekitin tersini yapmaya çalışırsa, birinci oyuncu zaten o sütunda olduğu için bir tane daha dikey hareketle

birinci oyuncuya daha da yaklaşacak. Birinci oyuncu bir önceki hamlesiyle aynı yönde yatay hareketi tekrarlarsa, bu sefer ikinci oyuncu onu sütunca takibe alacak. Birinci oyuncu illa ki ters yönde yatay hareket yapacak çünkü en kötü ihtimalle tahtanın kenarına gelecek. Bu ana kadar, ikinci oyuncu bir karelik takip mesafesini korumuş olacak. İkinci oyuncu, aralardaki dikey harekete dikey hareketle cevap verirken sütunca takip mesafesi korunurken satırca takip mesafesi azalacak. Belirli bir andan sonra, birinci oyuncu ile ikinci oyuncu aynı 2×2 karenin içerisinde yer alacak ve ikinci oyuncu birinci oyuncuyu yiyecek.

Cevap: D

32. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) + f(y) = f(x)f(y) + 1 - \dfrac{1}{xy}$ koşulunu sağlıyor ve $f(2) < 1$ ise, $f(3)$ değeri nedir?

(A) 2/3
(B) 4/3
(C) 1
(D) Verilenlerden tek bir $f(3)$ değeri belirlenemez.
(E) Verilen koşulları sağlayan bir f fonksiyonu yoktur.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
x = y = 1 \quad &\Rightarrow \quad f(1) + f(1) = f(1)^2 + 1 - \frac{1}{1 \cdot 1} \\
&\Rightarrow \quad 2f(1) - f(1)^2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad f(1)(2 - f(1)) = 0
\end{aligned}
$$

olduğu için $f(1) = 0$ ya da $f(1) = 2$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
x = 2, y = 1 \quad &\Rightarrow \quad f(2) + f(1) = f(2)f(1) + 1 - \frac{1}{2 \cdot 1} \\
&\Rightarrow \quad f(2) - f(2)f(1) = \frac{1}{2} - f(1) \\
&\Rightarrow \quad f(2)(1 - f(1)) = \frac{1}{2} - f(1) \\
&\Rightarrow \quad f(2) = \frac{\frac{1}{2} - f(1)}{1 - f(1)}
\end{aligned}
$$

olduğu için $f(1) = 0$ ise $f(2) = \dfrac{1}{2}$ ya da $f(1) = 2$ ise $f(2) = \dfrac{3}{2}$ elde edilir. Soruda $f(2) < 1$ olarak verildiği için $f(1) = 0$ dır.

$$
\begin{aligned}
y = 1 \quad &\Rightarrow \quad f(x) + f(1) = f(x)f(1) + 1 - \frac{1}{x \cdot 1} \\
&\Rightarrow \quad f(x) = 1 - \frac{1}{x} \\
&\Rightarrow \quad f(3) = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Çözümün sıhhati açısından $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun soruda verilenleri sağladığından emin olalım:

$$
\begin{aligned}
f(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad f(2) = \frac{1}{2} \\
f(x) + f(y) - f(x)f(y) \quad &= \quad (1 - \frac{1}{x}) + (1 - \frac{1}{y}) - (1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{y}) \\
&= \quad 2 - 1 - \frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \\
&= \quad 1 - \frac{1}{xy}
\end{aligned}
$$

Cevap: A

33. $[BC]$ çaplı bir çemberin bu çapına dik olan bir kişi $[AD]$, AC ve CD yaylarının orta noktaları sırasıyla E ve F, $AD \cap BE = \{G\}$, $AF \cap BC = \{H\}$ olmak üzere, $m(AC) = \alpha$ ise, BHG açısının α cinsinden ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

(A) $90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ **(B)** $60^\circ - \dfrac{\alpha}{3}$ **(C)** $\alpha - 30^\circ$ **(D)** $15^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$ **(E)** $\dfrac{180^\circ - 2\alpha}{3}$

Çözüm:

$AD \cap BC = \{I\}$, $AF \cap BE\{J\}$ ve $AV \cap GH = \{K\}$ olsun.

$$\begin{aligned} AE = EC &= CF = FD \\ \angle BID &= \frac{\angle AC + \angle BD}{2} = 90^\circ \\ \angle BJF &= \frac{\angle AE + \angle BF}{2} \\ &= \frac{\angle AC - \angle EC + \angle BF}{2} \\ &= \frac{\angle AC - \angle FD + \angle BF}{2} \\ &= \frac{\angle AC + \angle BD}{2} = 90^\circ \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\triangle ABH$ da, AI ve BJ yükseklik olduğu için G diklik merkezi ve HK da yükseklik olur. Bu durumda

$$\angle ABH = \frac{\angle AC}{2} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle ABH + \angle BHG = 90^\circ \Rightarrow \angle BHG = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

olur.

Cevap: A

34. a, b, c, d rasyonel sayılar ve $a > 0$ olmak üzere, $an^3 + bn^2 + cn + d$ sayısı her $n \geq 0$ tam sayısı için bir tam sayı oluyorsa, a nın alabileceği en küçük değer nedir?

(A) 1 **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{1}{6}$ **(D)** Böyle bir en küçük değer yoktur. **(E)** Hiçbiri

Çözüm:

$n = 0$ için, d'nin tam sayı olması gerekir.
$n = 1$ için, $a + b + c + d$ bir tam sayıdır
$n = 2$ için, $8a + 4b + 2c + d$ tam sayıdır.
$n = 3$ için, $27a + 9b + 3c + d$ tam sayıdır.
Buna göre $(a + b + c + d) - d = a + b + c$ bir tam sayı,
$(8a + 4b + 2c + d) - 2(a + b + c) - d = 6a + 2b$ bir tam sayı,
$(27a + 9b + 3c + d) - 3(a + b + c) - d = 24a + 6b$ bir tam sayı,
$4(6a + 2b) - (24a + 2b) = 2b$ bir tam sayı,
$(6a + 2b) - 2b = 6a$ bir tam sayı çıkar.
Soruda $a > 0$ verildiği için $6a > 0 \Rightarrow 6a \geq 1 \Rightarrow a \geq \dfrac{1}{6}$ elde edilir. $a = \dfrac{1}{6}$ değeri için $an^3 + bn^2 + cn + d$ ifadesini her zaman tam sayı yapan b, c, d sayıları var mı? Onu araştıracağız. Yani $a \geq \dfrac{1}{6}$ olduğunu gösterdik; ama henüz $a = \dfrac{1}{6}$ olabileceğini gösteremedik.
$(n-1)(n)(n+1) = n^3 - n$ sayısını ele alalım. Ardışık üç sayıdan en az biri 2 ile, tam olarak bir tanesi de 3 ile bölünür. Bu üçünün çarpımı da doğal olarak 6 ile bölünür. Bu durumda $\dfrac{n^3 - n}{6} = \dfrac{1}{6} \cdot n^3 + 0 \cdot n^2 + \dfrac{-1}{6} \cdot n + 0$ sayısı her $n \geq 0$ için tam sayıdır.

Cevap: C

35. 10 elemanlı bir kümenin, hiçbiri bir diğerinin altkümesi olmayacak şekilde en çok kaç altkümesi bulunur?

(A) 126 **(B)** 210 **(C)** 252 **(D)** 420 **(E)** 1024

Çözüm 1:

Test mantığı ile hareket edeceğiz. Eksik çözüm yapıp, en azından soruyu belirli bir aşamaya getireceğiz.

$$\binom{10}{0} = \binom{10}{10} < \binom{10}{1} = \binom{10}{9} < \binom{10}{2} = \binom{10}{8} < \binom{10}{3} = \binom{10}{7} < \binom{10}{4} = \binom{10}{6} < \binom{10}{5} = 252$$

Görüldğü gibi k-elemanlı altkümelerin sayısı en büyük değerini $k = 5$ olduğunda alıyor. k-elemanlı altkümelerden hiçbiri bir diğerini içermez, içerseydi altkümelerin ikisi de k elemanlı olduğu için altkümler aynı olurdu.
Ya bazısı 3-elemanlı, bazısı 4-elemanlı, bazısı 5-elemanlı, bazısı da 6-elemanlı altkümelerin birleşimden elde edilen altküme kümesi daha çok elemanlı ise? Buna karar vermek test içinde o kadar kolay değil. En azından, bu çözüm için bu iddianın doğru olmadığını ispatlamayacağız. Önsezilerimizle, C şıkkını işaretleyeceğiz.

Çözüm 2:

Çözüm 1'in aksine burada matematiksel bir çözüm yapalım. Açıkçası söz konusu problem bir Kombinatorik konusu olan Sperner Teoremi'ni doğrudan soruyor. Biraz da bu teoremin ispatını bilerek bir çözüm yapacağız. Böyle bir çözümün bir test süresinde düşünülüp yapılmasını çok mümkün görmüyoruz. Yine de;
S ile birbirinin altkümesi olmayan kümeleri içeren bir kümeyi gösterelim.
En basit mantığıyla, $S = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots \{10\}\}$ bu şekilde bir küme olacak. S_i ile S kümesinin i elemanlı kümelerden oluşan elemanları içeren kümeyi gösterelim. Buna göre yukarıda verdiğimiz basit örnek için $|S_5| = 0$ iken $|S_1| = 10$ dur.
$S = \{x : |x| = 5 \wedge x \subset \{1, 2, \dots, 10\}\}$ şeklinde bir S kümesi alalım. $|S| = \binom{10}{5} = 252$ ve S'deki elemanlardan hiçbiri bir diğerinin altkümesi değil. Bu durumda örneğin $|S_0| = |S_3| = |S_9| = 0$ iken $|S_5| = 252$ dir.
Bu tanımlamaları yaptıktan sonra, asıl sorunun çözümüne gelelim.

S içerisinden k elemanlı bir eleman alıp (unutmayalım, S nin elemanları birer kümeydi!), Bu elemanları $k!$ şekilde sıralayalım. Sonra da $\{1, 2, \dots, 10\}$ kümesinin kullanmadığımız $10 - k$ elamanını $(10 - k)!$ şekilde sıralayalım. k elemanlı elemanların kümesi S_k olacağından toplamda $|S_k| \cdot k! \cdot (10 - k)!$ şekilde $(1, 2, \dots 10)$ sayılarının bir permütasyonunu elde etmiş olduk.
Son yaptığımızı her $0 \leq k \leq 10$ sayısı için yaparsak toplamda

$$\sum_{k=0}^{10} |S_k| \cdot k! \cdot (10 - k)!$$

permütasyon elde ederiz. Toplamda elde ettiğimiz bu permüstasyonlar arasında aynı permütasyonlar var mı? Yoksa bu permütasyon sayısı

$$\sum_{k=0}^{10} |S_k| \cdot k! \cdot (10 - k)! \leq 10!$$

olmalı; çünkü 10 elemanlı bir kümenin 10! permütasyonu vardır. Toplamda elde ettiğimiz permütasyonlar arasında aynı olanlar varsa, o zaman dükkanı kapatma vakti gelmiş. Çünkü yapacak bir şeyimiz kalmadı demektir. Dua edelim, böyle bir şey olmasın.
S nin her hangi iki elemanı ele alalım. Bunlardan biri x elemanlı X, diğeri y elemanlı Y olsun; genellemeyi bozmadan $x \leq y$ kabul edelim. X i kullanarak yukarıda anlatıldığı gibi 10 elemanlı bir permütasyon üretelim. Sonra da Y yi kullaranak bir permütasyon üretelim. Bu iki permütasyonun ilk x basamağına bakalım. $X \not\subset Y$ olduğu için, bu basamaklar aynı olamaz. Bu durumda üretilen tüm permütasyonlar farklı, bunların toplam sayısı da 10! den küçük ya da 10! e eşittir. Biraz düzenleme yaparsak:

$$\sum_{k=0}^{10} |S_k| \cdot k! \cdot (10 - k)! \leq 10! \Rightarrow \sum_{k=0}^{10} \frac{|S_k|}{\dfrac{10!}{k! \cdot (10 - k)!}} \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{10} \frac{|S_k|}{\binom{10}{k}} \leq 1$$

elde ederiz. Şimdi de

$$\binom{10}{k} \leq \binom{10}{5} \Rightarrow \frac{|S_k|}{\binom{10}{5}} \leq \frac{|S_k|}{\binom{10}{k}}$$

özdeşliğini kullanarak

$$\sum_{k=0}^{10} \frac{|S_k|}{\binom{10}{5}} \leq \sum_{k=0}^{10} \frac{|S_k|}{\binom{10}{k}} \leq 1$$

ve

$$\frac{1}{\binom{10}{5}} \cdot \sum_{k=0}^{10} |S_k| \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{10} |S_k| = |S| \leq \binom{10}{5}$$

elde ederiz. Son eşitsizlik bize hiçbiri bir diğerinin altkümesi olmayan kümelerin toplam sayısının en fazla $\binom{10}{5}$ olacağını söylüyor. Anlaşılır kılmak için, biraz uzattık; yoksa internetteki kayanklarda sadece yukarıdaki cebirsel ifadeler verilerek ispat yapılıyor.

Cevap: C

36. Kenar uzunluğu 4 olan bir $ABCD$ kareside E, $[AB]$ kenarının orta noktasıdır. M noktası $[AC]$ üzerinde olmak üzere, $|EM| + |MB|$ toplamını tam sayı yapan kaç farklı M noktası vardır?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

Çözüm:

B nin AC ye göre simetriği D'dir. Bu durumda $DM = EM$ ve $EM + MB = DM + ME$ olur. $DM + ME$ en küçük değerini D, M, E doğrusalken alır. Bunu daha iyi görmek için D ile E yi birleştirelim. Üçgen eşitsizliğinden $DM + ME \geq DE = 2\sqrt{5}$ elde edilir. $DE \cap AC = \{M'\}$ ise $M = M'$ olduğunda $DM' + M'E = 2\sqrt{5}$ en küçük değerine ulaşır. $[M', A]$ aralığında $DM + ME$ artarken $M = A$ olduğunda $DA + AE = 6$ bu aralıkta en büyük değerine ulaşır. $[M', C]$ aralığında $DM + ME$ artarken $M = C$ olduğunda $DC + CE = 4 + 2\sqrt{5}$ bu aralıkta en büyük değerine ulaşır. M noktası A dan C ye giderken $ME + MB$ toplamı $6 \Rightarrow 2\sqrt{5} \Rightarrow 4 + 2\sqrt{5}$ şeklinde değerler alır. Bu değerlerden tam sayı olanlar $6, 5, 5, 6, 7, 8$ olacağından toplamda 6 farklı M noktası için $EM + MB$ tam sayı değer alır.

Cevap: E