

BÖLÜM – 5

Üçgenin Kenarları ve Yarıçapları Arasındaki Eşitsizlikler

5.1 $2r \leq R$ dir. Eşitlik ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

Çözüm: Bu eşitsizlik $|OI|^2 = R(R - 2r) \geq 0$ dan elde edilir.

L. Euler, Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae (1765)

L. Euler, Opera Omnia (1953)

Ramus – E. Rouche, Nouv. Ann. Math. (1851)

5.2 t ve T $-\infty < t \leq T \leq 11$ olacak şekilde reel sayılar ise,

$$2r \leq \frac{4s^2R^{-1} - 2tr}{27 - t} \leq \frac{4s^2R^{-1} - 2Tr}{27 - T} \leq R$$

Çözüm: $x < 27$ için $f(x) = \frac{4s^2R^{-1} - 2rx}{27 - x}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunu göz önüne

alalım. **1.1** ve **5.36** eşitsizliklerinden $(a + b + c)^2 \geq 3(bc + ca + ab) \geq 54Rr$ olur. Buna göre

$f(x) \geq \frac{54r - 2rx}{27 - x} = 2r$ dir. **5.8** eşitsizliğinden $4s^2 \leq 4(3r^2 + 4Rr + 4R^2)$ ve $2r \leq R$ den

$4r^2 \leq 16R^2 + 22Rr$ yazılır. $f'(x) = \frac{4s^2R^{-1} - 54r}{(27 - x)^2} \geq 0$ olduğundan f monoton azalmayan bir fonksiyondur. Dolayısıyla $f(11) \leq R$.

I. Paasche – O. Reutter, Problem 516, Elem. Math. (1965)

5.3 $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$ dir. Eşitlik ancak ve ancak $a = b = c$ iken sağlanır.

S. Nakajima, Tohom Math. J. (1925)

A. Padoa, Period. Math. (1925)

HATIRLATMA: Bu eşitsizlik **2.1** e denktir.

5.4 $s \leq 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

W. J. Blundon, Canad. Math. Bull. (1965)

W. J. Blundon, Problem E 1935, AMM (1966)

$$\mathbf{5.5} \quad 9r(4R+r) \leq 3s^2 \leq (4R+r)^2 \quad \dots (1)$$

$$\mathbf{\text{Çözüm:}} \quad y^3 - 2sy^2 - (s^2 + r(4R+r))y - 4sRr = 0 \quad \dots (2)$$

denkleminin kökleri a, b, c dir. (2) denkleminde $y = \frac{s(x-r)}{x}$ yazarsak kökleri r_a, r_b, r_c olan $x^3 - (4R+r)x^2 + s^2x - s^2r = 0$ denklemini elde ederiz. Rolle teoremini göz önüne alırsak $3y^2 - 4sy + s^2 + r(4R+r) = 0$ ve $3x^2 - 2(4R+r)x + s^2 = 0$ denklemlerinin her ikisinin de kökleri reel sayıdır. Bu ise, $3s^2 \geq 9r(4R+r)$ ve $(4R+r)^2 \geq 3s^2$ olmasını gerektirir.

G. Colombier – T. Doucet, Problem 1051, Nouv. Ann. Math. (1872)

5.6 $6r(4R+r) \leq 2s^2 \leq 2(2R+r)^2 + R^2$. Eşitlik durumu sadece üçgen eşkenarken sağlanır.

Çözüm: $r = \frac{F}{s}$ ve $R = \frac{abc}{4F}$ olduğundan $r(4R+r) = \frac{abc}{s} + \frac{F^2}{s^2} = \frac{1}{3}s^2 - Q \leq \frac{1}{3}s^2$ dir. Buradan açıkça $6r(4R+r) \leq 2s^2$ dir. Son eşitsizlik ve **5.13** deki $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ eşitsizliğinden

$$(2R+r)^2 + \frac{R^2}{2} = \frac{9R^2}{2} + r(4R+r) \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + r(4R+r) = s^2 \quad \text{dir. Buradan}$$

$$2s^2 \leq 2(2R+r)^2 + R^2$$

elde edilir.

F. Leuenberg – L. Carlitz, Problem E 1481, AMM (1961/62)

$$\mathbf{5.7} \quad 2s^2(2R-r) \leq R(4R+r)^2$$

O. Kooi, Simon Stevin (1958)

5.8 $r(16R - 5r) \leq s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$. Eşitlik durumu sadece üçgen eşkenarken sağlanır.

Çözüm: HIO üçgenini göz önüne alalım.

$$|OH|^2 = 9R^2 - \sum a^2 \dots (1)$$

$$|IO|^2 = R^2 - 2Rr \dots (2)$$

$$|IH|^2 = 2r^2 - 4R^2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \dots (3)$$

eşitlikleri vardır. Diğer taraftan

$$4R^2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = \frac{1}{4} \sum a^2 - (2R + r)^2$$

dir. Böylece, $|IH|^2 = 3r^2 + 4Rr + 4R^2 - \frac{1}{4} \sum a^2$ dir. Bu ise bize $\sum a^2 \leq 4(3r^2 + 4Rr + 4R^2)$ eşitsizliğini verir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken vardır.

$|OG| : |GH| = 1 : 2$ şeklindeki Euler teoreminden

$$|GI|^2 = \frac{2}{3}|IO|^2 + \frac{1}{3}|IH|^2 + \frac{2}{9}|OH|^2 \dots (4)$$

yazılır. (1), (2), (3) eşitliklerini (4) de yerine koyarsak

$$|GI|^2 = r^2 - \frac{1}{12}(\sum a)^2 + \frac{2}{9}\sum a^2$$

olur. $(\sum a)^2 = 2\sum a^2 + 4r(4R + r)$ eşitliğini göz önüne alırsak

$$36 \cdot |GI|^2 = (\sum a)^2 + 20r^2 - 64Rr$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan $(\sum a)^2 \geq 4r(16R - 5r)$ bulunur. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken vardır.

J. Steinig, Elem. Math. (1963)

HATIRLATMA: **5.7** deki eşitsizliklerin her ikisine birden $R \geq 2r$ eşitsizliğinin bir destekleyicisi gözüyle bakılabilir.

5.9 $q(R, r)$ ve $Q(R, r)$ reel katsayılı ikinci dereceden ifadeler olsun. Bu halde, eşitlik durumunu sadece eşkenar üçgende sağlayan ve

$$q(R, r) \leq s^2 \leq Q(R, r)$$

biçimindeki eşitsizlikleri sağlayan mümkün en iyi ifadeler:

$$q(R, r) = 16Rr - 5r^2 \text{ ve } Q(R, r) = 4R^2 + 4Rr + 3r^2$$

W. J. Blundon, Canad. Math. Bull. (1965)

5.10 $f(R, r)$ ve $F(R, r)$ homojen iki reel fonksiyon olsun. Bu halde, eşitlik durumunu sadece eşkenar üçgende sağlayan ve

$$f(R, r) \leq s^2 \leq F(R, r)$$

biçimindeki eşitsizlikleri sağlayan mümkün en iyi ifadeler:

$$f(R, r) = 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}$$

$$F(R, r) = 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}$$

W. J. Blundon, Canad. Math. Bull. (1965)

5.11 $s^2 \geq 27r^2$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken vardır.

Çözüm: Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$\frac{s}{3} = \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dir.} \quad (s-a)(s-b)(s-c) = \frac{F^2}{s} = r^2s$$

eşitliğinden $\frac{s}{3} \geq \sqrt[3]{r^2s}$ olup $s^2 \geq 27r^2$ elde edilir.

N. A. Edwards, Problem 1273, Nouv. Ann. Math. 37 (1878)

J. M. Child. Math. Gaz. 23 (1939)

5.12 $2s^2 \geq 27Rr \dots (1)$ dir.

Çözüm: $(a+b+c)^3 \geq 27abc$ ve $abc = 4FR = 4Rrs$ eşitliklerinden $8s^3 \geq 27 \cdot 4Rrs$ olup buradan (1) eşitsizliği elde edilir.

C. Cosnita and F. Turtoiu, Cuegere de probleme de algebra, Bucuresti (1965)

5.13 $36r^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2 \dots$ (1) dir. Eşitlik ancak ve ancak $a = b = c$ iken sağlanır.

Çözüm: $\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^{1/2} \geq \frac{a+b+c}{3}$ dir. **5.11** deki $6\sqrt{3}r \leq a+b+c$ eşitsizliğinden

$$36r^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$$

elde edilir. (1) deki ikinci eşitsizlik $9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = |OH|^2 \geq 0$ ile elde edilir.

J. Neuberg, Ed. Times, News Ser. (1906)

T. Kubota, Tohoku Math. J. (1925)

J. Steinig, Elem. Math. (1963)

5.14 $24Rr - 12r^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$. Eşitlik sadece üçgen eşkenar iken sağlanır.

J. C. Gerretsen, Nieuw Tijdschr. Wisk (1953)

J. Steinig, Elem. Math. (1963)

$$\mathbf{5.15} \quad 4R^2 + 16Rr - 3r^2 - 4(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\leq 4R^2 + 16Rr - 3r^2 + 4(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}$$

W. J. Blundon, Canad. Math. Bull. (1965)

5.16 $36r^2 \leq bc + ca + ab \leq 9R^2$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a = b = c$ iken sağlanır.

Çözüm: **7.12** deki $\frac{9r}{2F} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{9R}{2F}$ eşitsizliklerini $F = \frac{abc}{4R}$ ile genişletirsek

$18Rr \leq bc + ca + ab \leq 9R^2$ olur. $R \geq 2r$ kullanılırsa $36r^2 \leq bc + ca + ab \leq 9R^2$ bulunur.

F. Leuenberger, Elem. Math (1958)

5.17 $4r(5R-r) \leq bc+ca+ab \leq 4(R+r)^2$. Eşitlik ancak ve ancak üçgen eşkenarken sağlanır.

J. Steinig, Elem. Math. (1963)

5.18 $36r^2 \leq 4r(5R-r) \leq bc+ca+ab \leq 4(R+r)^2 \leq 9R^2$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenarken sağlanır.

W. J. Blundon, Canad. Math. Bull. (1965)

HATIRLATMA: **5.16**, **5.17** ve $R \geq 2r$ den **5.18** elde edilir.

5.19 $2R^2 + 14Rr - 2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq bc+ca+ab \leq 2R^2 + 14Rr + 2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}$

Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenarken sağlanır.

W. J. Blundon, Canad. Math. Bull. (1965)

5.20 $a(s-a) + b(s-b) + c(s-c) \leq 9Rr$.

S. G. Guba, Matematika v skole (1966)

5.21 $abc \leq 8R^2r + (12\sqrt{3}-16)Rr^2$. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenarken sağlanır.

W. J. Blundon, Canad. Math. Bull. (1965)

5.22 $\frac{\sqrt{3}}{R} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r}$.

F. Leuenberger, Elem. Math (1960)

5.23 $\frac{3\sqrt{3}}{2(R+r)} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r}$. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenarken sağlanır.

J. Steinig, Elem. Math. (1963)

HATIRLATMA: Bu eşitsizlik **5.22** nin geliştirilmiş şeklidir.

5.24 $\frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \leq \frac{1}{4r^2}$... (1) dir.

Çözüm: $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{2s}{abc} = \frac{1}{2Rr}$ olduğundan (1) eşitsizlikleri $\frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{2Rr} \leq \frac{1}{4r^2}$ eşitsizliklerine denktir. Bu eşitsizlikler ise $R \geq 2r$ den kolayca elde edilebilir.

F. Leuenberger, Elem. Math (1958)

5.25 $8r(R-2r) \leq Q \leq 8R(R-2r)$. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenarken sağlanır.

J. C. H. Gerretsen, Nieuw Tijdschr. Wisk. (1953)

5.26 $4r^2 \leq \frac{abc}{a+b+c}$. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

M. S. Klamkin, Math. Teacher, (1967)

5.27 $abc \leq (R\sqrt{3})^3$ dir. Eşitlik ancak ve ancak $a = b = c$ durumunda sağlanır.

Çözüm: $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$ ve **5.3** eşitsizliğinden (1) in doğru olduğunu anlarız.

5.28 $M_k(a, b, c) \leq R\sqrt{3}$ eşitsizliğinin her üçgende geçerli olması için gerek ve yeter şart

$$k \leq \frac{\log 9 - \log 4}{\log 4 - \log 3}$$

olmasıdır.

A. Makowski – J. Berkes, Elem. Math. (1962/63)

5.29 $(a+b+c)\sqrt{3} \leq 2(r_a + r_b + r_c)$. Eşitlik ancak ve ancak $a = b = c$ durumunda sağlanır.

J. C. H. Gerretsen, Nieuw Tijdschr. Wisk. (1953)

F. Leuenberger, Elem. Math. (1961)

5.30 $\frac{a^2}{r_b r_c} + \frac{b^2}{r_c r_a} + \frac{c^2}{r_a r_b} \geq 4$. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

Bu eşitsizlik R. R. Janic tarafından bulunmuştur.

5.31 $(s-a)\sqrt{3} < 4R - r_a$.

E. Lemoine, Problem 578, J. Math. Elem. (1894)

5.32 $(s-a)\left(\sqrt{3} + \frac{a^2 + (b-c)^2}{2F}\right) \leq 4R - r_a$. Eşitlik ancak ve ancak $a = b = c$ için sağlanır.

Çözüm: $4R + r = r_a + r_b + r_c$, $r_a = \frac{rs}{s-a}$, $r_b = \frac{rs}{s-b}$, $r_c = \frac{rs}{s-c}$ eşitliklerinden

$$4R - r_a = r_b + r_c - r = rs \left(\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} \right) = (s-a) \frac{s^2 - bc}{F}$$

$$= (s-a) \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(-bc + ca + ab)}{4F}$$

yazılır. **4.7** deki eşitsizlikten $4R - r_a \geq (s-a) \frac{4\sqrt{3}F + 2(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc)}{4F}$ olup buradan (1)

elde edilir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a = b = c$ için sağlanır.

R. R. Janic, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. (1967)

5.33 $5R - r \geq s\sqrt{3}$... (1) Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

Çözüm: $4R + r = r_a + r_b + r_c$, $r_a = \frac{rs}{s-a}$, $r_b = \frac{rs}{s-b}$, $r_c = \frac{rs}{s-c}$ eşitlikleriyle başlayalım.

$$R \geq 2r \text{ eşitsizliğinden } 5R - r \geq r_a + r_b + r_c = rs \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \right) = \frac{s}{F} (bc + ca + ab - s^2)$$

olur. **4.7** eşitsizliğinden faydalanılırsa (1) elde edilir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a = b = c$ için sağlanır.

R. R. Janic, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. (1967)

5.34 $s^2 \leq r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \dots$ (1) dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a = b = c$ için sağlanır.

Çözüm: **2.35** den dolayı $\tan^2 \frac{\alpha}{2} + \tan^2 \frac{\beta}{2} + \tan^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1$ dir ve

$$r_a = s \tan \frac{\alpha}{2}, r_b = s \tan \frac{\beta}{2}, r_c = s \tan \frac{\gamma}{2}$$

olduğundan (1) e ulaşılır.

E. Bokov, Matematika v skole (1956/57)

5.35 $8r_a r_b r_c \leq 3\sqrt{3}abc$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a = b = c$ için sağlanır.

F. Leuenberger, Elem. Math. (1961)

5.36 $54Rr \leq 3(bc + ca + ab) \leq 4(r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b)$.

Çözüm: İlk eşitsizlik **5.16** da zaten ispat edilmişti.

$4(r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b) = (a + b + c)^2$ ve $3(bc + ca + ab) \leq (a + b + c)^2$ ifadelerinden ikinci eşitsizliği elde ederiz.

F. Leuenberger, J. Steinig, Elem. Math. (1965)

5.37 Dar açılı bir üçgende $32r_a r_b r_c - 14r^2 (r_a + r_b + r_c) \leq 9r (r_a + r_b + r_c)^2 + 9r^3$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu ancak ve ancak eşkenar üçgende vardır.

S. Reich, Problem E 1930, AMM (1966)

$$5.38 \quad \frac{3}{2}R \leq \max(r_a, r_b, r_c)$$

P. Erdős, Mat. Lapok, (1949)

$$5.39 \quad r_a \leq r_b \leq r_c \text{ ise } r_a \leq \frac{3}{2}R, r_b < 2R, \frac{3}{2}R \leq r_c < 4R \text{ dir.}$$

H. J. Baron, Tohoku Math. J. (1941)

$$5.40 \quad \frac{4}{3}R < \frac{r_a + r_b + r_c}{3} \leq \frac{3}{2}R \leq \sqrt[4]{\frac{r_a^4 + r_b^4 + r_c^4}{3}}$$

L. Fejes Toth, Mat. Lapok (1949)

$$5.41 \quad 9r \leq r_a + r_b + r_c \leq \frac{9}{2}R.$$

M. S. Klamkin, Math. Teacher (1967)

5.42 x, y, z nin geometrik ortalaması $G(x, y, z)$ olmak üzere

$$G\left(r, r, \frac{R}{2}\right) \leq \frac{1}{3}G(r_a, r_b, r_c) \leq G\left(r, \frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right)$$

Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken vardır.

A. Makowski, Nieuw. Arch. Wisk. (1964)

$$5.43 \quad \frac{27}{4}R^2 \leq r_a^2 + r_b^2 + r_c^2. \text{ Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken vardır.}$$

V. Thebault, Mat. Lapok (1952)

A. Makowski, Nieuw. Arch. Wisk. (1964)

$$\text{5.44 } \frac{3}{2}R \leq M_k(r_a, r_b, r_c), (k \geq 2).$$

G. Hajos, Math. Lapok (1950)

L. Fejes Toth, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und in Raum, Berlin (1953)

HATIRLATMA: Bu eşitsizlik **5.40** eşitsizliğinin bir genellemesidir.

$$\text{5.45 } 7R^2 \leq r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \dots (1) \text{ dir.}$$

$$\text{Çözüm: } r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

eşitliğinden ve **5.13** den (1) elde edilir.

Ju. I. Gerasimov, Matematika v skole (1967)

R. R. JANIC'İN YORUMU: Aşağıdaki daha güçlü eşitsizlik yazılabilir:

$$8R^2 - 4r^2 \leq r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \dots (2)$$

Çünkü **5.14** e göre $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$ dir.

(2) eşitsizliği **5.40** ve **5.43** eşitsizliklerinden daha güçlüdür.

$$\text{5.46 } \frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c} \leq \frac{abc}{R} \text{ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak } a = b = c \text{ için sağlanır.}$$

J. Andersson, Problem 1779, AMM (1952)

HATIRLATMA: Bu eşitsizlik **1.9** a denktir.

$$\text{5.47 } \sqrt{\frac{a}{r_a}} + \sqrt{\frac{b}{r_b}} + \sqrt{\frac{c}{r_c}} \leq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{s}{R}} \dots (1)$$

$$\text{Çözüm: } r_a = \frac{rs}{s-a} \dots \text{ vs olduğundan (1) eşitsizliği şuna denktir:}$$

$$\sqrt{a(s-a)} + \sqrt{b(s-b)} + \sqrt{c(s-c)} \leq \frac{3}{2}s$$

Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$\sqrt{a(s-a)} + \sqrt{b(s-b)} + \sqrt{c(s-c)} \leq \frac{a+(s-a)}{2} + \frac{b+(s-b)}{2} + \frac{c+(s-c)}{2} = \frac{3}{2}s$$

Gaz. Mat. B 15 (1964)