

BÖLÜM – 4

Üçgenin Kenarları ve Alanı Arasındaki Eşitsizlikler

4.1 $4F \leq \min(b^2 + c^2, c^2 + a^2, a^2 + b^2)$ dir.

Çözüm: $a \geq b \geq c$ kabul edelim. $b^2 + c^2 \geq 2bc$ ve $2bc \geq 2bc \cdot \sin \alpha$ olduğundan

$b^2 + c^2 \geq 2bc \cdot \sin \alpha = 4F$ elde edilir.

4.2 $s^2 \geq 3F\sqrt{3}$. Eşitlik ancak ve ancak eşkenar üçgende sağlanır.

Çözüm: $[(s-a)(s-b)(s-c)]^{1/3} \leq \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} = \frac{s}{3}$ olduğundan

$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{s^3}{27}$ dir. $F = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{1/2} \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ elde edilir.

H. Hadwiger, Jber. Deutsch. Math – Verein (1939)

L. A. Santalo, Math. Notae (1943)

4.3 $s^2 \geq 3F\sqrt{3} + \frac{1}{2}Q$.

J. C. H. Gerretsen, Nieuw Tijdschr. Wisk. (1953)

4.4 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4F\sqrt{3}$. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

Çözüm: Kosinüs teoreminden $a^2 + b^2 + c^2 = 2(b^2 + c^2) - 2bc \cdot \cos \alpha$ dir. $F = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$ olduğundan

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4F\sqrt{3} = 2(b^2 + c^2) - 2bc \cdot \cos \alpha - 2\sqrt{3}bc \cdot \sin \alpha$$

$$= 2(b^2 + c^2) - 4bc \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) = 2(b^2 + c^2) - 4bc \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$$

$\geq 2(b^2 + c^2) - 4bc = 2(b - c)^2$ dir. Eşitlik ancak ve ancak $b = c$ ve $\alpha = \pi/3$ iken sağlanır.

R. Weitzenböck, Math. Z. (1919)

P. Finsler and H. Hadwiger, Comment Math. Helv (1937/38)

L. A. Santalo, Math. Notae (1943)

R. A., Elementa, matematik, fysik, kemi (Uppsala) (1966)

4.5 $bc + ca + ab \geq 4F\sqrt{3} \dots (1)$ dir.

Çözüm: $(\sin \alpha)^{-1} + (\sin \beta)^{-1} + (\sin \gamma)^{-1} \geq 3\sqrt[3]{(\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma)^{-1}}$ ve **2.7** den

$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ dir. Buna göre $(\sin \alpha)^{-1} + (\sin \beta)^{-1} + (\sin \gamma)^{-1} \geq 2\sqrt{3}$ olur. Bu son eşitsizliği ve $bc + ca + ab = 2F \left[(\sin \alpha)^{-1} + (\sin \beta)^{-1} + (\sin \gamma)^{-1} \right]$ eşitliğini kullanırsak (1) i elde ederiz.

HATIRLATMA: (1) den ve

$$(bc + ca + ab)^2 \leq 3(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \leq 3(a^4 + b^4 + c^4)$$

eşitsizliklerinden **4.12**, **4.4**, **4.10** eşitsizlikleri elde edilir.

V. O. Gordon, Matematika v skole (1966)

4.6 $bc + ca + ab \geq 4F\sqrt{3} + \frac{1}{2}Q$.

J. C. H. Gerretsen, Nieuw Tijdschr. Wisk. (1953)

4.7 $4F\sqrt{3} + Q \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 4F\sqrt{3} + 3Q$. Eşitlik ancak ve ancak üçgen eşkenarken sağlanır.

H. Hadwiger, Jber. Deutsch. Math – Verein (1939)

HATIRLATMA: İlk eşitsizlik ayrıca şu yerlerde ispatlandı:

P. Finsler and H. Hadwiger, Comment Math. Helv (1937/38)

J. Karamata, Problem 119, Glasnik Mat. – Fiz. Astronom (1948)

O. Kooi, Simon Stevin (1958)

J. Steinig, Elem. Math. (1963)

S. Zetel, Matematika v skole (1965)

4.8 $4F\sqrt{3} + Q \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 4F \left(\sec \frac{\alpha}{2} + \sec \frac{\beta}{2} + \sec \frac{\gamma}{2} - \sqrt{3} \right) + Q$. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

S. T. Berkolaike, Matematika v skole (1967)

H. Hadwiger, Jber. Deutsch. Math – Verein (1939)

4.9 $12F\sqrt{3} + 2Q \leq (a + b + c)^2 \leq 12F\sqrt{3} + 12Q$. Eşitlik sadece üçgen eşkenarken sağlanır.

H. Hadwiger, Jber. Deutsch. Math – Verein (1939)

HATIRLATMA: İlk eşitsizlik ayrıca şu yerde de ispatlandı:

P. Finsler and H. Hadwiger, Comment Math. Helv (1937/38)

4.10 $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16F^2$. Eşitlik ancak ve ancak $a = b = c$ iken sağlanır.

F. Goldner, Problem 69, Elem. Math. (1969)

4.11 $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16F^2 + 4FQ\sqrt{3} + \frac{1}{2}Q^2 \dots (1)$. Eşitlik sadece $a = b = c$ iken sağlanır.

Çözüm: 4.7 deki Finsler – Hadwiger eşitsizliğinin karesini alırsak

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) \geq 48F^2 + 8FQ\sqrt{3} + Q^2$$

olur. $2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 16F^2 + a^4 + b^4 + c^4$ eşitliğinden

$2(a^4 + b^4 + c^4) + 16F^2 \geq 48F^2 + 8FQ\sqrt{3} + Q^2$ olur. Buradan (1) elde edilir.

Matematika i fizika, Sofia (1965)

4.12 $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geq 16F^2 \dots (1)$ dir. Eşitlik sadece üçgen eşkenarken sağlanır.

Çözüm: Heron formülünden $2(a^4 + b^4 + c^4) - (a^4 + b^4 + c^4) = 16F^2$ yazılır.

$(b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 \geq 0$ eşitsizliğine göre $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$ dir.

Buradan (1) eşitsizliğini elde ederiz.

F. Goldner, Problem 69, Elem. Math. (1969)

4.13 $4F\sqrt{3} \leq \frac{9abc}{a+b+c}$. Eşitlik sadece $a = b = c$ iken sağlanır.

T. R. Curry, Problem 1861, AMM (1966)

4.14 $(abc)^2 \geq \left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^3 \dots (1)$ dir. Eşitlik sadece $a = b = c$ iken sağlanır.

Çözüm: $abc = 4RF$ ve **5.3** deki $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$ eşitsizliğinden

$\frac{4F}{\sqrt{3}} = \frac{abc}{R\sqrt{3}} \leq \frac{3abc}{2s} = \frac{3abc}{a+b+c} \leq (abc)^{2/3}$ olup (1) eşitsizliğine ulaşılır.

L. Carlitz – F. Leuenberger, Problem E 1454, AMM (1961)

H. W. Guhhenheimer, Problem E 1724, AMM (1964)

4.15 x, y, z reel sayılar ise $a^x b^y c^z + b^x c^y a^z + c^x a^y b^z \geq 3 \cdot \frac{2^{x+y+z} F^{(x+y+z)/2}}{3^{(x+y+z)/4}} \dots (1)$ dir.

Çözüm: Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden

$a^x b^y c^z + b^x c^y a^z + c^x a^y b^z \geq 3(abc)^{(x+y+z)/3}$ dir. Bu eşitsizlikten ve **4.14** den (1) e ulaşılır.

Bu eşitsizlik ve ispatı P. M. Vasic tarafından verilmiştir.

4.16 x, y, z reel sayılar ise

$$b^x c^y (b+c)^z + c^x a^y (c+a)^z + a^x b^y (a+b)^z \geq 3 \cdot 2^z \frac{2^{x+y+z} F^{(x+y+z)/2}}{3^{(x+y+z)/4}} \dots (1).$$

Çözüm: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ olduğundan

$$b^x c^y (b+c)^z + c^x a^y (c+a)^z + a^x b^y (a+b)^z \geq 2^z \left(b^{x+(z/2)} c^{y+(z/2)} + c^{x+(z/2)} a^{y+(z/2)} + a^{x+(z/2)} b^{y+(z/2)} \right) \\ \geq 3 \cdot 2^z \sqrt[3]{(abc)^{x+y+z}} \text{ dir. Bu eşitsizlik ve 4.14 den (1) e ulaşılır.}$$

Bu eşitsizlik ve ispatı R. J. Djordjevic tarafından yapılmıştır.

4.17 x, y, z reel sayılar ise

$$a^x (a+b)^y (b+c)^z + b^x (b+c)^y (c+a)^z + c^x (c+a)^y (a+b)^z \geq 3 \cdot 2^x \frac{2^{2(y+z)} F^{(x+y+z)/2}}{3^{(x+y+z)/4}} \dots (1) \text{ dir.}$$

Bu eşitsizlik R. J. Djordjevic tarafından verilmiştir.

$$\mathbf{4.18} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2H \text{ ve } bc + ca + ab = K \text{ ise, } \frac{(K-H)(3K-5H)}{12} \leq F^2 \leq \frac{(K-H)^2}{12} \dots (1)$$

dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar olduğunda sağlanır.

S. Beatty, Trans. Roy. Soc. Canada (1954)

$$\mathbf{4.19} \quad q = (Q/2)^{1/2} \text{ ise, } \frac{s(s+q)^2(s-2q)}{27} \leq F^2 \leq \frac{s(s-q)^2(s+2q)}{27} \dots (1) \text{ dir.}$$

İlk ve ikinci eşitlikler sırasıyla tabanı en kısa ve en uzun olan bir ikizkenar üçgende sağlanır. Her iki eşitliğin sağlanması için $q = 0$ dan dolayı üçgen eşkenar olmalıdır.

R. Frucht, Canad. J. Math. (1957)

$$4.20 \quad 27(b^2 + c^2 - a^2)^2 (c^2 + a^2 - b^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2 \leq (4F)^6.$$

Eşitlik durumu ancak ve ancak $a = b = c$ iken vardır.

F. Balitrand, Intermed. Math. (1916)

$$4.21 \quad \lambda > 0 \text{ ise, } F \leq \frac{\sqrt{3}}{4} (a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda)^{2/\lambda}$$

C. N. Miils – O. Dunkel, Problem 3207, AMM (1927)