BÖLÜM – 3

Üçgenin Açıları ve Diğer Elemanları Arasındaki Eşitsizlikler

3.1 $a<\frac{1}{2}(b+c)$ ise, $\alpha<\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ dir.

Çözüm: Sinüs teoreminden dolayı verilen $a<\frac{1}{2}(b+c)$ eşitsizliği $\sin\alpha<\frac{1}{2}(\sin\beta+\sin\gamma)$ şekline dönüşür. Buna göre $\sin\alpha<\frac{1}{2}(\sin\beta+\sin\gamma)=\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\leq\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$ olur. α ve $\frac{\beta+\gamma}{2}$ birer dar açı olduğundan $\alpha<\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ elde edilir.

G. Polya – A. Hess, Elem. Math. (1958)

3.2 $a\alpha+b\beta+c\gamma\geq\frac{1}{2}(b\gamma+c\alpha+a\beta+c\beta+a\gamma+b\alpha)$ … (1)

Çözüm: $a\geq b\geq c$ olsun. Bu durumda $\alpha\geq\beta\geq\gamma$ olur. $\alpha\geq\beta$ eşitsizliğini $a-b\geq0$ ile, $\alpha\geq\gamma$ eşitsizliğini $a-c\geq0$ ile, $\beta\geq\gamma$ eşitsizliğini $b-c\geq0$ ile çarpalım. Buradan

$$a\alpha+b\beta\geq a\beta+b\alpha\,,\ b\beta+c\gamma\geq b\gamma+c\beta\,,\ a\alpha+c\gamma\geq a\gamma+c\alpha$$

eşitsizlikleri elde edilir. Taraf tarafa toplarsak

$$2(a\alpha+b\beta+c\gamma)\geq b\gamma+c\alpha+a\beta+c\beta+a\gamma+b\alpha$$

elde edilir. Buradan (1) eşitsizliğinin doğruluğu görülür.

3.3 $\frac{\pi}{3}\leq\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$. Eşitlik ancak ve ancak $a=b=c$ için sağlanır.

Çözüm: $a\geq b\geq c$ olsun. Bu durumda $\alpha\geq\beta\geq\gamma$ olur ve

$$(a-b)(\alpha-\beta)+(b-c)(\beta-\gamma)+(c-a)(\gamma-\alpha)\geq0$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliği düzenlersek

$$2(a\alpha+b\beta+c\gamma)\geq(b+c)\alpha+(c+a)\beta+(a+b)\gamma$$

elde edilir. Her iki tarafa $a\alpha+b\beta+c\gamma$ eklenirse $3(a\alpha+b\beta+c\gamma)\geq(a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma)$ olur. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ olduğundan $\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}$ elde edilir. Eşitlik sadece $a=b=c$ için sağlanır.

a,b,c bir üçgenin kenar uzunlukları olduğundan $a+b+c>2a$, $a+b+c>2b$, $a+b+c>2c$ dir. Bu eşitsizlikleri sırasıyla α,β,γ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$(a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma)>2(a\alpha+b\beta+c\gamma)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\dfrac{\pi}{2}$ dir.

3.4 $\alpha\leq\beta\leq\gamma$ ise,

a. $\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\leq\dfrac{\pi-\alpha}{2}$

b. $\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\leq\dfrac{\pi}{2}\left(1-\tan\dfrac{\alpha}{2}\cdot\tan\dfrac{\beta}{2}\right)$

Çözüm:

a. $\alpha\leq\beta\leq\gamma$ ve $(a+b-c)\alpha+(a-b+c)\alpha=2a\alpha$ olduğundan

$(a-b+c)\beta+(a+b-c)\gamma\geq2a\alpha$ olup $2a\alpha+b\beta+c\gamma\leq(a+c)\beta+(a+b)\gamma$ yazılır. Her iki tarafa $b\beta+c\gamma$ eklenirse $2(a\alpha+b\beta+c\gamma)\leq(a+b+c)(\beta+\gamma)$ olur. Buradan

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\leq\frac{\pi-\alpha}{2}$$

elde edilir.

b. $a\leq b\leq c$ eşitsizliğinden $\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\leq\dfrac{c(\alpha+\beta+\gamma)}{a+b+c}=\dfrac{c\pi}{2s}$ yazılır.

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\right)^{1/2},\quad \tan\frac{\beta}{2}=\left(\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}\right)^{1/2}$$

olduğundan $\dfrac{\pi}{2}\left(1-\tan\dfrac{\alpha}{2}\cdot\tan\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{s-c}{s}\right)=\dfrac{c\pi}{2s}$ dir. Böylelikle

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\leq\frac{\pi}{2}\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\right)$$

eşitsizliğine ulaşırız.

Bu ispatı G. Kaladjzic'e borçluyuz.

D. Markovic, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie (1952)

3.5 $\dfrac{(b\gamma-c\beta)^2+(c\alpha-a\gamma)^2+(a\beta-b\alpha)^2}{(a+b+c)^2}<\dfrac{\alpha^2}{4}$ dir. Olası en iyi sonuç budur.

D. Blanusa, Problem 175, Glasnik matematicko – fizicki i astronomski (1953)

HATIRLATMA: T. Leko bu eşitsizliğini çok komplike bir ispatını vermiştir. Daha basit bir çözüm aranmaktadır.

3.6 $\dfrac{2bc\cdot\cos\alpha}{b+c}<b+c-a<\dfrac{2bc}{a}$.

Çözüm: $a\leq\max(b,c)$ olsun. $\max(b,c)<a+\min(b,c)$ olduğundan

$$b+c-a=\max(b,c)+\min(b,c)-a<\min(b,c)+\min(b,c)+a-a$$

$$=2\min(b,c)\leq\frac{2\min(b,c)\cdot\max(b,c)}{a}=\frac{2bc}{a}$$

eşitsizliğine ulaşırız.

$a>\max(b,c)$ olsun. Bu durumda $a<2\max(b,c)$ olur. Aksi halde $a\geq b+c$ olur. Böylece

$$b+c-a=\min(b,c)+\max(b,c)-a<\min(b,c)+a-a$$

$$\min(b,c)\leq\frac{2\min(b,c)\cdot\max(b,c)}{a}=\frac{2bc}{a}\ \ldots\ (2)$$

Dolayısıyla (1) eşitsizliğinin ikinci tarafı ispatlanmış olur.

$(b+c)(b+c-a)-2bc\cdot\cos\alpha=a\left(\dfrac{2bc}{a}-(b+c-a)\right)$ eşitliğinde (2) eşitsizliğini kullanırsak (1) eşitsizliğinin ilk tarafını ispatlamış oluruz.

J. A. Kalman, Math. Gaz. (1963)

3.7 $\left(1-\frac{a}{b+c}\right)\left(1-\frac{b}{c+a}\right)\left(1-\frac{c}{a+b}\right)\le \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Eşitlik durumu sadece eşkenar üçgende sağlanır.

Gaz. Mat. B 8 (195)

3.8 $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\ge\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)}{abc}$. Eşitlik durumu sadece eşkenar üçgende sağlanır.

T. R. Curry, Problem E 1861, AMM (1966)

3.9 $a\le b\le c$ ise $g\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le G$ dir. Burada

$$g=\frac{2}{1+\tan(\beta/2)\tan(\gamma/2)}\ge 2\cos^2\frac{\gamma}{2} \text{ ve } G=\frac{2}{1+\tan(\alpha/2)\tan(\beta/2)}\le 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ dir.}$$

Eşitlik durumu ancak ve ancak $a=b=c$ iken sağlanır.

Çözüm: $a\le b\le c$ ve

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\right)^{1/2},\ \tan\frac{\beta}{2}=\left(\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}\right)^{1/2},\tan\frac{\gamma}{2}=\left(\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}\right)^{1/2}$$

olduğundan

$$g=\frac{2}{1+\tan(\beta/2)\tan(\gamma/2)}=\frac{2s}{2s-a}=\frac{a+b+c}{b+c}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

$$G=\frac{2}{1+\tan(\alpha/2)\tan(\beta/2)}=\frac{2s}{2s-c}=\frac{a+b+c}{a+b}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Bu ispat D. Kalajdzic tarafından yapılmıştır.

D. Markovic, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie (1952)

3.10 $k = \dfrac{c^t}{a^t + b^t}$ ise

$t < 0$ için $0 < k \le 2^{t-1} \sin^t \dfrac{\gamma}{2}$ dir.

$0 < t \le 1$ için $2^{t-1} \sin^t \dfrac{\gamma}{2} \le k < 1$ dir.

$1 < t \le 2$ için $\min\left(1, 2^{t-1} \sin^t \dfrac{\gamma}{2}\right) \le k \le \max\left(2^{t-1-t/2}, 2^{t-1} \sin^t \dfrac{\gamma}{2}\right)$ dir.

$t \ge 2$ için $\min\left(2^{t-1-t/2}, 2^{t-1} \sin^t \dfrac{\gamma}{2}\right) \le k \le \max\left(1, 2^{t-1} \sin^t \dfrac{\gamma}{2}\right)$

HATIRLATMA: Bu eşitsizlikler R. Ballieu, Simon Stevin tarafından (1946) bulunmuştur. $t \ge 2$ durumunda ve t bir pozitif tamsayı iken üst sınır F. Van der Blij, Simon Stevin tarafından (1947) belirlenmiştir.

3.11 $k = \dfrac{R}{r}$ ise,

$$1 - 4k - k^2 \le \cos\beta \cdot \cos\gamma + \cos\gamma \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \cos\beta \le k + k^2$$

$$-1 + 3k - \frac{3}{2}k^2 \le \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \le \frac{1}{2}k^2$$

Eşitlik durumu ancak ve ancak eşkenar üçgende sağlanır.

W. J. Blundon, Problem E 1925, AMM (1966)

3.12 Çevrel merkezi ile iç merkezi arasındaki uzaklık d olan bir üçgende $\alpha > \beta > \gamma$ ise,

$$2R\cos\alpha < R - d < 2R\cos\beta < R + d < 2R\cos\gamma$$

O. Bottema, Euclides 39 (1963)

3.13 $a \cdot \sin\alpha + b \cdot \sin\beta + c \cdot \sin\gamma \ge \dfrac{2\sqrt{3}F}{R}$. Eşitlik ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

Çözüm: $\sin\alpha = \frac{a}{2R}, \sin\beta = \frac{b}{2R}, \sin\gamma = \frac{c}{2R}$ olduğundan

$a\cdot\sin\alpha + b\cdot\sin\beta + c\cdot\sin\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{2R} \geq \frac{2\sqrt{3}F}{R}$ olur. Burada **4.4** deki Weizenböck Eşitsizliği kullanıldı.

3.14 $9r \leq a\cdot\sin\alpha + b\cdot\sin\beta + c\cdot\sin\gamma \leq \frac{9}{2}R$ dir. Eşitlik sadece eşkenar üçgende sağlanır.

Çözüm: $a\cdot\sin\alpha = \frac{a^2}{2R} = \frac{2aF}{bc} = \frac{h_b h_c}{h_a}$ olur. β ve γ için benzer eşitlikler yazılırsa

$$a\cdot\sin\alpha + b\cdot\sin\beta + c\cdot\sin\gamma = \frac{h_b h_c}{h_a} + \frac{h_c h_a}{h_b} + \frac{h_a h_b}{h_c}$$

Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden ve **6.6** dan

$$\frac{h_b h_c}{h_a} + \frac{h_c h_a}{h_b} + \frac{h_a h_b}{h_c} \geq 3\sqrt[3]{h_a h_b h_c} \geq 9r$$

elde edilir. Eşitlik sadece $h_a = h_b = h_c$ durumunda sağlanır.

Sinüs teoreminden $a\cdot\sin\alpha + b\cdot\sin\beta + c\cdot\sin\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{2R}$ … (1) dir. **5. 13** den dolayı

$$a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$$

olur. (1) den $a\cdot\sin\alpha + b\cdot\sin\beta + c\cdot\sin\gamma \leq \frac{9}{2}R$ elde ederiz.

Bu sonuç R. R. Janic tarafından bulunmuştur.

3.15 $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 2 + \left(3\sqrt{3} - 4\right)\cdot\frac{r}{R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Eşitlik sadece eşkenar üçgende sağlanır.

W. J. Blundon, Canad. Math. Bull. (1965)