BÖLÜM – 2

Üçgenin Açıları Arasındaki Eşitsizlikler

2.1 $0<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ … (1) dir. Eşitlik ancak ve ancak üçgen eşkenarken vardır.

Çözüm: $a^2+b^2+c^2=8R^2(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)$ eşitliğinden ve $\frac{(a+b+c)^2}{3}\le a^2+b^2+c^2$ eşitsizliğinden

$$\frac{(a+b+c)^2}{3}\le a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2=8R^2(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)\le 9R^2 \quad \ldots (2)$$

elde edilir. Burada 2.23 deki eşitsizliği kullandık. (2) den ve sinüs teoreminden (1) e ulaşılır.

A. Padoa, Period Math. 5 (1925)

T. R. Curry, Problem E 1644, AMM (1963)

2.2

$0<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ … (1) her üçgende sağlanır.

$2<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ … (2) dar açılı üçgende sağlanır.

$0<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le 1+\sqrt{2}$ … (3) geniş açılı üçgende sağlanır.

O. Bottema, Euclides 30 (1954/55)

HATIRLATMA: (1) ve (2) eşitsizlikleri ayrıca R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58) de ispatlandı.

2.3

$0<\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin\gamma^2\le\frac{9}{4}$ … (1) her üçgende sağlanır.

$2 < \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin\gamma^2 \leq \frac{9}{4}$ … (2) dar açılı üçgende sağlanır.

$0 < \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin\gamma^2 \leq 2$ … (3) geniş açılı üçgende sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.4 $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$ … (1) dir. Eşitlik ancak ve ancak üçgen eşkenarken sağlanır.

Çözüm: Sinüs teoreminden $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{F}{R \cdot r}$ yazılır. Ayrıca

$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 2(\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \cos\beta + \sin\gamma \cdot \cos\gamma)$

$= \frac{1}{R}(a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma)$ dir. $a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma = \frac{2F}{R}$ olduğundan

$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \frac{2F}{R^2}$ elde edilir. Böylece

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma} = \frac{R}{2r} \geq 1$$

2.5 $\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} \leq 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ … (1) dir.

Çözüm: $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ eşitsizliğinde $x = \sqrt{\sin\alpha}$, $y = \sqrt{\sin\beta}$, $z = \sqrt{\sin\gamma}$ koyarsak $\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} \leq 3\sqrt{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}$ olur. **2.1** den (1) e ulaşılır.

T. Albu, Gaz. Mat. B 14 (1963)

2.6 $k \leq 1$ ise $M_k(\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ dir.

Gaz. Mat. B 14 (1963)

2.7 $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ dir. Eşitlik ancak ve ancak eşkenar üçgende sağlanır.

K. P. Wilkins, AMM 44 (1937)

2.8

$0<\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ … (1) her üçgende sağlanır.

$0<\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ … (2) dar açılı üçgende sağlanır.

$0<\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\le\frac{\sqrt{3}}{3}$ … (3) geniş açılı üçgende sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.9 $1<\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{3}{2}$ dir. Eşitlik ancak ve ancak $\alpha=\beta=\gamma$ iken sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

HATIRLATMA: İkinci eşitsizlik ayrıca M. J. Child, Math. Gaz. 23 (1939)

2.10 $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{2\sqrt{3}}{9}$ dir. Eşitlik ancak ve ancak $\alpha=\beta$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ iken sağlanır.

K. P. Wilkins, AMM 44 (1937)

2.11 $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\gamma\le\frac{1}{54}\left(2\sqrt{13}-5\right)\sqrt{2\sqrt{13}+22}$ dir. Eşitlik ancak ve ancak $\alpha=\beta$, $\cos\alpha=\frac{1}{6}\left(\sqrt{13}-1\right)$ iken sağlanır.

K. P. Wilkins, AMM 44 (1937)

2.12 $0 < \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$ dir. Eşitlik ancak ve ancak eşkenar üçgende sağlanır.

Çözüm: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ eşitliğini biliyoruz. Benzer eşitlikleri $\frac{\beta}{2}$ ve $\frac{\gamma}{2}$ içinde yazabiliriz. Bu ifadeleri çarparsak $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{r}{4R} \le \frac{1}{8}$ elde edilir.

HATIRLATMA: Bu eşitsizlik aşağıdaki yerlerde ispat edildi

T. Rado, AMM 39 (1932)

V. Krylov, Matematika v skole (1938)

J. M. Child. Math. Gaz. 23 (1939)

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.13 $\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\beta}{4}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{54}\left(5\sqrt{10}-14\right)$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $\alpha = \beta$, $\cos\alpha = \frac{1}{6}\left(\sqrt{10}+2\right)$ iken sağlanır.

K. P. Wilkins, AMM 44 (1937)

2.14 $\frac{3}{4} \le \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} < 1$ … (1) dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak eşkenar üçgende sağlanır.

Çözüm: $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\right)$ eşitliğini biliyoruz. **2.16** daki eşitsizliği göz önüne alırsak (1) eşitsizliği sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.15 $\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} \le \frac{3}{4}$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak eşkenar üçgende sağlanır.

J. M. Child. Math. Gaz. 23 (1939)

2.16 $1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$ … (1) dir. Eşitlik ancak ve ancak eşkenar üçgende sağlanır.

Çözüm: $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$ … (2) eşitliği yazılabilir. 2.12 deki eşitsizlikten ve (2) den, (1) eşitsizliği elde edilir.

HATIRLATMA: (1) eşitsiliğinin ikinci kısmı için J. M. Child. Math. Gaz. 23 (1939) kaynağına bakılabilir. Daha sonra 1960 da A. N. Aheart tarafından AMM dergisinde Problem E, 1398 olarak bu problemin daha zayıf bir şekli yayınlandı.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.17 $\cos\alpha + \sqrt{2}\left(\cos\beta + \cos\gamma\right) \le 2$ dir. Eşitlik ancak ve ancak $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \gamma$ iken sağlanır.

Çözüm: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ olduğundan

$$\cos\alpha + \sqrt{2}\left(\cos\beta + \cos\gamma\right) = \cos\alpha + 2\sqrt{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \cos\alpha + 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\le \cos\alpha + 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 2 - 2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \le 2.$$

Bu ispat R. P Lucic tarafından verilmiştir.

2.18 λ bir reel sayı ise $\cos\alpha + \lambda\left(\cos\beta + \cos\gamma\right) \le 1 + \frac{\lambda^2}{2}$ dir.

Çözüm: Herhangi üç β, γ, λ reel sayısı için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left(\cos\beta + \cos\gamma - \lambda\right)^2 + \left(\sin\beta - \sin\gamma\right)^2 \ge 0$$

Kare açılımları yapılırsa

$$-\cos\left(\beta + \gamma\right) + \lambda\left(\cos\beta + \cos\gamma\right) \le 1 + \frac{\lambda^2}{2}$$

olur. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ olduğundan

$$\cos\alpha + \lambda\left(\cos\beta + \cos\gamma\right) \le 1 + \frac{\lambda^2}{2}$$

elde edilir. Eşitlik ancak ve ancak $0<\lambda<2$, $\cos\alpha = 1-\frac{\lambda^2}{2}$, $\cos\beta=\cos\gamma=\frac{\lambda}{2}$ iken sağlanır.

HATIRLATMA: $\lambda=\sqrt{2}$ için **2. 17** eşitsizliği elde edilir.

Z. Mitrovic, Mat. Vesnik 4 (1967)

2. 19 $a\ge b\ge c$ olmak üzere kenar uzunlukları *a*, *b*, *c* olan bir üçgenin bu kenarların karşısındaki açıları sırasıyla α,β,γ olsun. Bu durumda açıları $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ olan keyfi bir üçgen için,

$$bc+ca-ab < bc\cdot\cos\alpha_1 + ca\cdot\cos\beta_1 + ab\cdot\cos\gamma_1 \le \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right) \ \ldots (1)$$

olur. Eşitlik durumu ancak ve ancak $\alpha_1=\alpha, \beta_1=\beta, \gamma_1=\gamma$ iken sağlanır.

HATIRLATMA: $\alpha=\beta=\gamma$ ise (1) eşitsizliği bize **2.16** yı verir.

$\alpha=\frac{\pi}{2}, \beta=\gamma=\frac{\pi}{4}$ ise (1) eşitsizliği bize **2.17** yi verir.

$\alpha=\frac{2\pi}{3}, \beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$ ise (1) den $1<\cos\alpha_1+\sqrt{3}\left(\cos\beta_1+\cos\gamma_1\right)\le\frac{5}{2}$ eşitsizliği türetilir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $\alpha_1=\frac{2\pi}{3}, \beta_1=\gamma_1=\frac{\pi}{6}$ iken sağlanır.

P. Szasz, Monatsh. Math. 66 (1962)

2. 20 *x*, *y*, *z* reel sayılar ve $xyz>0$ ise, $x\cdot\cos\alpha + y\cdot\cos\beta + z\cdot\cos\beta \le \frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$ … (1) dir.

Eğer $xyz<0$ ise (1) eşitsizliği tersine döner.

Her iki durumda da eşitlik ancak ve ancak $\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\beta$ iken sağlanır.

Çözüm: x, y, z, α, β reel sayılar ise

$$\left(xz\cdot\cos\alpha + yz\cdot\cos\beta - yz\right)^2 + \left(xz\cdot\sin\alpha - yz\cdot\sin\beta\right)^2 \ge 0 \ \ldots (2)$$

olup buradan $y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+2xyz^2\cdot\cos(\alpha+\beta)-2xy^2z\cdot\cos\beta-2x^2yz\cdot\cos\alpha\ge 0$ yazılır. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ olduğundan

$$2xyz^2 \cdot \cos\gamma + 2xy^2z \cdot \cos\beta + 2x^2yz \cdot \cos\alpha \le y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 \ \ldots (3)$$

elde edilir. Bu eşitsizliği $xyz > 0$ sayısı ile bölersek (1) elde edilir. Eğer $xyz < 0$ ile bölersek (1) eşitsizliğinin yönü değişir.

HATIRLATMA: x, y, z pozitif sayıları için (1) eşitsizliği D. F. Barrow tarafından yayınlanmıştır. Yukarıdaki genelleme ve ispat 1967 de R. R. Janic tarafından yapılmıştır.

D. F. Barrow, Problem 3740, AMM (1937)

2. 21

$\frac{3}{4} \le \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\beta < 3 \ \ldots$ (1) herhangi bir üçgende sağlanır.

$\frac{3}{4} \le \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\beta < 1 \ \ldots$ (2) dar açılı üçgende sağlanır.

$1 < \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\beta < 3 \ \ldots$ (3) geniş açılı üçgende sağlanır.

Eşitlik sadece eşkenar üçgende sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2. 22 $\cos\beta \cdot \cos\gamma + \cos\gamma \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \cos\beta \le \frac{3}{4}$. Eşitlik sadece eşkenar üçgende sağlanır.

J. M. Child, Math. Gaz. 23 (1939)

2. 23 $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \le \frac{1}{8} \ \ldots$ (1) dir. Eşitlik sadece eşkenar üçgende sağlanır.

Çözüm: Dar açılı üçgende $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ pozitiftir. Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \le \left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^3$$

yazılır. **2.16** dan (1) eşitsizliğinin doğru olduğunu anlarız. Dik ve geniş açılı üçgenlerde (1) in sağlandığı açıktır.

C.C. Popovici, Gaz. Mat. 31 (1925)

J. M. Child, Math. Gaz. 23 (1939)

2.24

$-1 < \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \le \frac{1}{8}$ … (1) her üçgende sağlanır.

$0 < \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \le \frac{1}{8}$ … (2) dar açılı üçgende sağlanır.

$-1 < \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma < 0$ … (3) geniş açılı üçgende sağlanır.

Eşitlik ancak ve ancak üçgen eşkenarken sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.25 $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ve $\beta < \frac{\pi}{2}$ ise $\cos\alpha + \cos\beta > \sin\gamma$ dır. $\alpha > \frac{\pi}{2}$ veya $\beta > \frac{\pi}{2}$ ise eşitsizliğin yönü değişir.

A. Pantazi, Gaz. Mat. 23 (1917/18)

V. Cristescu, Gaz. Mat. 26 (1920/21)

M. B. Barbalatt, Gaz. Mat. 30 (1924/25)

2.26 $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \le \frac{1}{24}\left(\cos^2(\beta-\gamma) + \cos^2(\gamma-\alpha) + \cos^2(\alpha-\beta)\right)$ … (1) dir.

Çözüm: $(x+y)^2 \ge 4xy$ eşitsizliğinden $(\cos\alpha + 2\cos\beta \cdot \cos\gamma)^2 \ge 8\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$ … (2) elde edilir. $\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma)$ olup $(-\cos(\beta+\gamma) + 2\cos\beta \cdot \cos\gamma)^2 \ge 8\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$ yazılır. Bu ifade düzenlenirse

$$\cos^2(\beta-\gamma) \ge 8\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \text{ … (3)}$$

olur. Benzer şekilde

$$\cos^2(\gamma-\alpha) \ge 8\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma,\ \cos^2(\alpha-\beta) \ge 8\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \text{ … (4)}$$

yazılabilir. (3) ve (4) ün toplamından (1) elde edilir.

C. Cosnita and F. Turtou, Culegere de probleme de algebra, Bucharesti 1965.

2.27 $2 < \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Eşitlik ancak ve ancak üçgen eşkenarken sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.28

$0 < \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$ herhangi bir üçgende sağlanır.

$\frac{1}{2} < \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$ dar açılı üçgende sağlanır.

$0 < \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} < \frac{3\sqrt{3}}{8}$ geniş açılı üçgende sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.29 $2 < \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} < \frac{9}{4}$. Eşitlik ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.30

$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \ge 3\sqrt{3}$ dar açılı üçgende sağlanır.

$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma < 0$ geniş açılı üçgende sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.31

$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma > 0$ herhangi bir üçgende sağlanır.

$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geq 9$ dar açılı üçgende sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.32

$\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma\geq 3\sqrt{3}$ dar açılı üçgende sağlanır.

$\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma<0$ geniş açılı üçgende sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.33 $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\geq\sqrt{3}$ dir. Eşitlik ancak ve ancak eşkenar üçgende sağlanır.

J. Karamata, Problem 119, Glasnik Mathematicko – fizicki i astronomski 3 (1948)

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.34 $0<\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$ dir. Eşitlik ancak ve ancak eşkenar üçgende sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.35 $\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\gamma}{2}\geq 1$ … (1) dir. Eşitlik ancak ve ancak eşkenar üçgende sağlanır.

Çözüm: $\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}$ olduğundan $\tan\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1-\tan(\alpha/2)\cdot\tan(\beta/2)}{\tan(\alpha/2)+\tan(\beta/2)}$ yazılır. Buradan $\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=1$ elde edilir. $x=\tan\frac{\alpha}{2}, y=\tan\frac{\beta}{2}, z=\tan\frac{\gamma}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$xy+yz+zx=1 \quad \ldots (2)$$

bağıntısına ulaşırız. $2\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left(xy+yz+zx\right)=\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2+\left(x-y\right)^2\geq 0$ eşitsizliğinden

$$x^2+y^2+z^2\geq 1$$

elde edilir. Bu ise bize (1) eşitsizliğini verir.

C. V. Durell and A. Robson, Advenced Trigonometry, London 1948.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.36 $\tan^6\frac{\alpha}{2}+\tan^6\frac{\beta}{2}+\tan^6\frac{\gamma}{2}\geq\frac{1}{9}$. Eşitlik ancak ve ancak eşkenar üçgende sağlanır.

2.37 $\sqrt{\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+5}+\sqrt{\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}+5}+\sqrt{\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}+5}\leq 4\sqrt{3}$.

Ju. A. Izosimov, Matematika v skole (1953)

2.38 $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\geq\sqrt{3}$. Eşitlik ancak ve ancak eşkenar üçgende sağlanır.

Çözüm: $\cot\alpha+\cot\beta=2\tan\frac{\gamma}{2}$ eşitliğini biliyoruz. Bu eşitliğe göre

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=2\tan\frac{\gamma}{2}+\cot\gamma=2\tan\frac{\gamma}{2}+\frac{\cot^2(\gamma/2)-1}{2\cot(\gamma/2)}=\frac{\cot^2(\gamma/2)+3}{2\cot(\gamma/2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{\gamma}{2}+3\tan\frac{\gamma}{2}\right)\geq\sqrt{3}$$

T. Varopoulos, Bull. Soc. Math. Grece (1934)

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.39 $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geq 1$.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.40

$\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cot\gamma\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$ dar açılı üçgende sağlanır.

$\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cot\gamma<0$ geniş açılı üçgende sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.41 $\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}\geq 3\sqrt{3}$.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.42 $\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}\geq 3\sqrt{3}$.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.43 $\cot^2\frac{\alpha}{2}+\cot^2\frac{\beta}{2}+\cot^2\frac{\gamma}{2}\geq 9$.

Çözüm: $\tan\frac{\alpha}{2},\tan\frac{\beta}{2},\tan\frac{\gamma}{2}>0$ olduğundan aritmetik – harmonik ortalama eşitsizliğinden

$$\left(\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\right)\left(\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}\cdot\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\right)\geq 9$$

… (2) olur. $\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=1$ olduğundan

$$\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}\cdot\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\geq 9 \quad \ldots (3)$$

yazılır. $\cot^2\frac{\alpha}{2}+\cot^2\frac{\beta}{2}\geq 2\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}$ eşitsizliğinin α,β,γ için dairesel permütasyonlarını yazıp toplarsak $\cot^2\frac{\alpha}{2}+\cot^2\frac{\beta}{2}+\cot^2\frac{\gamma}{2}\geq\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}\cdot\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}$ olur. Bu eşitsizlik ve (2) eşitsizliği birlikte bize (1) i verir.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

Ju. I. Gerasimov, matematika v skole 1964.

2.44 $\cot^2\frac{\alpha}{2}+\cot^2\frac{\beta}{2}+\cot^2\frac{\gamma}{2}\geq\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}\right)(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)$ … (1) dir.

Çözüm: $\cot\frac{\alpha}{2}=x,\cot\frac{\beta}{2}=y,\cot\frac{\gamma}{2}=z$ gösterimlerini kullanalım. $x+y+z=xyz$ olduğundan $(x+y+z)^2=xyz(x+y+z)$ dir. Buna göre

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(x^2-1\right)yz+\left(y^2-1\right)zx+\left(z^2-1\right)xy-(yz+zx+xy)$$

eşitliği yazılabilir. $x^2+y^2+z^2\geq yz+zx+xy$ eşitsizliğinden

$2\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\left(x^2-1\right)yz+\left(y^2-1\right)zx+\left(z^2-1\right)xy$ olup

$x^2+y^2+z^2\geq xyz\left(\frac{x^2-1}{2x}+\frac{y^2-1}{2y}+\frac{z^2-1}{2z}\right)$

$=(x+y+z)\left(\frac{x^2-1}{2x}+\frac{y^2-1}{2y}+\frac{z^2-1}{2z}\right)$ … (2) yazılır. $\frac{\cot^2(t/2)-1}{2\cot(t/2)}=\cot t$ formülünü kullanarak x, y, z yerine $\cot\frac{\alpha}{2},\cot\frac{\beta}{2},\cot\frac{\gamma}{2}$ değerlerini yazarsak (2) den (1) elde edilir.

C. Cosnita and F. Turtou, Culegere de probleme de algebra, Bucharesti 1965.

2.45 $\sec\alpha+\sec\beta+\sec\gamma\geq 6$ dır. Eşitlik ancak ve ancak üçgen eşkenarken sağlanır.

J. M. Child, Math. Gaz. 23 (1939)

2.46

$\sec^2\alpha+\sec^2\beta+\sec^2\gamma\geq 12$ dar açılı üçgende sağlanır.

$\sec^2\alpha+\sec^2\beta+\sec^2\gamma>3$ geniş açılı üçgende sağlanır.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.47 $\sec\beta\cdot\sec\gamma+\sec\gamma\cdot\sec\alpha+\sec\alpha\cdot\sec\beta\geq 12$. Eşitlik sadece üçgen eşkenarken sağlanır.

J. M. Child, Math. Gaz. 23 (1939)

2.48 $\sec^2\frac{\alpha}{2}+\sec^2\frac{\beta}{2}+\sec^2\frac{\gamma}{2}\geq 4$ dir.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.49 $\csc\alpha+\csc\beta+\csc\gamma\geq 2\sqrt{3}$, eşitlik durumu sadece eşkenar üçgende sağlanır.

T. R. Curry, Problem E 1861, AMM 1966

2.50 $\csc^2\alpha+\csc^2\beta+\csc^2\gamma\geq 4$.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.51 $\csc\frac{\alpha}{2}+\csc\frac{\beta}{2}+\csc\frac{\gamma}{2}\geq 6$. Eşitlik ancak ve ancak üçgen eşkenarken sağlanır.

J. M. Child, Math. Gaz. 23 (1939)

M. S. Klamkin, Problem E 1361, AMM (1959)

2.52 $\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}\geq 12$.

R. Kooistra, Nieuw Tijdschr. Wisk 45 (1957/58)

2.53 $\csc\frac{\beta}{2}\cdot\csc\frac{\gamma}{2}+\csc\frac{\gamma}{2}\cdot\csc\frac{\alpha}{2}+\csc\frac{\alpha}{2}\cdot\csc\frac{\beta}{2}\geq 12$. Eşitlik sadece üçgen eşkenarken vardır.

J. M. Child, Math. Gaz. 23 (1939)

2.54 $\csc\alpha+\csc\beta+\csc\gamma\geq\frac{9}{4}\sec\frac{\alpha}{2}\cdot\sec\frac{\beta}{2}\cdot\sec\frac{\gamma}{2}$ … (1)

Çözüm: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$ eşitsizliğinde $x=\sin\alpha, y=\sin\beta, z=\sin\gamma$ değişken değiştirmesi yapalım.

$$\csc\alpha+\csc\beta+\csc\gamma\geq\frac{9}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\ \ldots(2)$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$ olduğundan (2) den (1) eşitsizliğini elde ederiz.

C. Ionescu – Tiu, Gaz. Mat. B 14 (1963)

2.55 $\csc 2\alpha+\csc 2\beta+\csc 2\gamma\geq\csc\alpha+\csc\beta+\csc\gamma\geq\sec\frac{\alpha}{2}+\sec\frac{\beta}{2}+\sec\frac{\gamma}{2}\geq 2\sqrt{3}$.

2.56 $\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2\leq\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\ \ldots(1)$

Çözüm: Bir üçgende şu bağıntılardan biri sağlanır: $\alpha\geq\frac{\pi}{3}\geq\beta\geq\gamma$ veya $\gamma\geq\beta\geq\frac{\pi}{3}\geq\alpha$. Her iki durumda da $\left(\sin\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\right)\geq 0$ dır. Böylece $4\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\geq 2\left(\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)-1$ dir. Dolayısıyla

$$1+4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\geq 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)+1-\sin\frac{\alpha}{2}\ \ldots(2)$$

Sabit bir α için $\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$ çarpımı en büyük değerine $\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi-\alpha}{4}$ için ulaşacağından $\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leq\sin^2\frac{\pi-\alpha}{4}=\frac{1-\sin(\alpha/2)}{2}$ dir. Son eşitsizlikten ve (2) den

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\geq 2\left(\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

olur. Buna göre (1) eşitsizliği sağlanır.

V. Thebault – L. Bankoff, Problem E 1272, AMM (1960)

2.57 $\dfrac{\cos(\beta/2)\cdot\cos(\gamma/2)}{\sin(\alpha/2)}+\dfrac{\cos(\gamma/2)\cdot\cos(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)}+\dfrac{\cos(\alpha/2)\cdot\cos(\beta/2)}{\sin(\gamma/2)}\geq\dfrac{9}{2}$.

C. Ionescu – Tiu, Gaz. Mat. B 14 (1963)

2.58 $S=\dfrac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)\cdot\cos(\gamma/2)}+\dfrac{\sin(\beta/2)}{\sin(\gamma/2)\cdot\cos(\alpha/2)}+\dfrac{\sin(\gamma/2)}{\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\beta/2)}\geq 2\sqrt{3}$ … (1)

Çözüm: Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden $S\geq 3\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}\right)^{-1/3}$ … (2)

2.28 den $\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ olduğunu biliyoruz. (2) den (1) i elde ederiz.

D. Nicolae, Gaz. Mat. B 14 (1963)

2.59 $\dfrac{1+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}\geq\sqrt{3}$. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

H. W. Guggenheimer, Plane Geometry and its Groups, san Francisco, Cambridge, London, Amsterdam 1967

2.60 $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{4}+\sin\dfrac{\alpha}{4}\right)<\cos\dfrac{\beta}{4}+\cos\dfrac{\gamma}{4}+\sin\dfrac{\beta}{4}+\sin\dfrac{\gamma}{4}$

Çözüm: $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{4}+\sin\dfrac{\alpha}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi-\beta-\gamma}{4}+\sin\dfrac{\pi-\beta-\gamma}{4}\right)=2\cos\dfrac{\beta+\gamma}{4}<2\cos\dfrac{\beta-\gamma}{4}$

$=\cos\dfrac{\beta}{4}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{4}+\sin\dfrac{\beta}{4}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{4}+\cos\dfrac{\gamma}{4}\cdot\cos\dfrac{\beta}{4}+\sin\dfrac{\gamma}{4}\cdot\sin\dfrac{\beta}{4}$

$<\cos\dfrac{\beta}{4}+\cos\dfrac{\gamma}{4}+\sin\dfrac{\beta}{4}+\sin\dfrac{\gamma}{4}$

C. Ionescu – Tiu, Gaz. Mat. B 12 (1961)

2.61 α,β,γ redyan türünden açı ölçüleri ise $\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cos\gamma>0$ dır.

L. E. Bush, AMM (1957)

2.62 $2(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)\geq\csc\alpha+\csc\beta+\csc\gamma$.

C. Cosnita and F. Turtou, Culegere de probleme de algebra, Bucharesti 1965.

2.63 $\tan\beta\cdot\tan\gamma+\tan\gamma\cdot\tan\alpha+\tan\alpha\cdot\tan\beta\geq 3+\sec\alpha+\sec\beta+\sec\gamma$

C. Cosnita and F. Turtou, Culegere de probleme de algebra, Bucharesti 1965.

2.64 $\dfrac{\sqrt{\tan(\beta/2)\cdot\tan(\gamma/2)}}{\cos(\alpha/2)}+\dfrac{\sqrt{\tan(\gamma/2)\cdot\tan(\alpha/2)}}{\cos(\beta/2)}+\dfrac{\sqrt{\tan(\alpha/2)\cdot\tan(\beta/2)}}{\cos(\gamma/2)}\leq 2$

Ju. A. Izosimov, matematika v skole 1958

2.65 *n* bir doğal sayı ise, $\cot^n\alpha+\cot^n\beta+\cot^n\gamma\geq 3\cdot 3^{-n/2}$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

M. N. Kritikos, Actes du Congres interbalkanique de mathematiciens, Athenes 1934.