O. BOTTEMA

GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

Çeviri: *L. Gökçe*

Çevirmenin Önsözü:

O. Bottema, R. Z. Djordjivic, R. R. Janic, D. S. Mitrinovic, P. M. Vasic tarafından yazılıp 1969 da yayınlanan *Geometrik Eşitsizlikler* isimli bu eserin Türkçe tercümesini www.geomania.org aracılığıyla matematik severlerin hizmetine sunuyoruz. Geometrik eşitsizlikler konusunda bir başyapıt olan bu eser Batı dünyasında bir övgü ifadesi olarak *Bible of Bottema* (Bottema'nın İncil'i) ismiyle anılır. Biz belli bir dine ait kutsal kitap isimlerini karıştırmadan sadece işin geometri tarafıyla ilgileneceğiz. Kitap bitirilince övgüye layık olduğu bu yolun sarrafları tarafından zaten takdir edilecektir …

L. Gökçe

İçindekiler

Notasyonlar:

Bu kitapta aşağıdaki gösterimler kullanılmıştır:

A, *B*, *C*	bir üçgenin köşeleri
a, *b*, *c*	*BC*, *CA*, *AB* kenarları
α, β, γ	üçgenin açıları
h_a, h_b, h_c	yükseklikler
m_a, m_b, m_c	kenarortayların uzunlukları
w_a, w_b, w_c	açıortayların uzunlukları
O	çevrel merkez
R	çevrel yarıçap
I	iç merkez
r	iç çemberin yarıçap
H	diklik merkezi
G	ağırlık merkezi
s	yarı çevre
F	alan
P	üçgenin içinde keyfi bir nokta
I_a, I_b, I_c	dış merkezler
r_a, r_b, r_c	dış yarıçaplar
R_1, R_2, R_3	*P* nin *ABC* üçgeninin köşelerine olan uzaklıkları
r_1, r_2, r_3	*P* nin *ABC* üçgeninin kenarlarına olan uzaklıkları

$Q = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$

$M_k(x, y, z)$	*x*, *y*, *z* nin *k* – inci mertebeden ortalaması
p, *q*	*ABCD* dörtgeninin köşegen uzunlukları

BÖLÜM – 1

Yalnızca Üçgenin Kenarlarını İçeren Eşitsizlikler

1.1 $3(bc+ca+ab) \le (a+b+c)^2 < 4(bc+ca+ab)$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

Çözüm: $2bc \le b^2+c^2$, $2ca \le c^2+a^2$, $2ab \le a^2+b^2$ eşitsizliklerini biliyoruz. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplayıp her iki tarafa da $4(bc+ca+ab)$ eklersek $3(bc+ca+ab) \le (a+b+c)^2$ eşitsizliğine ulaşırız. Eşitlik durumu sadece $a=b=c$ iken vardır.

Diğer taraftan *a*, *b*, *c* bir üçgenin kenarları olduğundan $|b-c|<a$, $|c-a|<b$, $|a-b|<c$ dir. Buradan $(b-c)^2<a^2$, $(c-a)^2<b^2$, $(a-b)^2<c^2$ olup bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak

$$a^2+b^2+c^2 < 2(bc+ca+ab)$$

ya da

$$(a+b+c)^2 < 4(bc+ca+ab)$$

F. E. Wood, Problem E 345, AMM (1938)

1.2 $a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{36}{35}\left(s^2+\dfrac{abc}{s}\right)$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

Çözüm: $a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2$ ve $abc \le \left[\dfrac{1}{3}(a+b+c)\right]^3$ eşitsizliklerini biliyoruz. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a=b=c$ iken vardır.

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{4}{3}s^2 = \frac{36}{35}\left[s^2+\left(\frac{2s}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{s}\right] = \frac{36}{35}\left[s^2+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{s}\right]$$

$$\ge \frac{36}{35}\left(s^2+\frac{abc}{s}\right)$$

olur. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a=b=c$ iken vardır.

J. F. Darling, W. Moser, Problem E 1456, AMM (1961)

1.3: $8(s-a)(s-b)(s-c) \le abc$ … (1)

dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

Çözüm: $\sqrt{a^2-(b-c)^2} \le a$, $\sqrt{b^2-(c-a)^2} \le b$, $\sqrt{c^2-(a-b)^2} \le c$ eşitsizlikleri vardır. Taraf tarafa çarparsak $\sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2} \le abc$ olur. $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ pozitif sayılar olduğundan

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc$$

elde edilir. (1) de eşitlik durumu ancak ve ancak $a=b=c$ iken vardır.

A. Padoa, Period Mat. 5 (1925)

1.4: $8abc \le (a+b)(b+c)(c+a)$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

E. Cesaro, Nouvelle Correspondance Math, 6 (1880)

HATIRLATMA: Bu eşitsizlik aynı zamanda negatif olmayan tüm *a*, *b*, *c* reel sayıları için sağlanır.

1.5: $3(a+b)(b+c)(c+a) \le 8(a^3+b^3+c^3)$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

A. Padoa, Period Mat. 5 (1925)

HATIRLATMA: Bu eşitsizlik aynı zamanda negatif olmayan tüm *a*, *b*, *c* reel sayıları için sağlanır.

1.6: $2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 3(a^3+b^3+c^3+3abc)$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

M. Colins, Educational Times 13 (1870)

1.7: $abc < a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c) \le \frac{3}{2}abc$ … (1) eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $2a^2(s-a)+2b^2(s-b)+2c^2(s-c)=a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$

$=-\left(a^3+b^3+c^3\right)+b^2c+c^2a+a^2b$ ve

$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=-\left(a^3+b^3+c^3\right)+b^2c+c^2a+a^2b-2abc$ eşitliklerinden

$$2\sum a^2(s-a)=(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+2abc \quad \ldots (2)$$

elde edilir. (2) ve **1.3** den (1) eşitsizliği elde edilir.

1.8: $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\geq 48(s-a)(s-b)(s-c) \quad \ldots (1)$

eşitsizliğini ispatlayınız. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

Çözüm: $b+c\geq 2\sqrt{bc}$, $c+a\geq 2\sqrt{ca}$, $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ eşitsizlikleri vardır. Buna göre

$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\geq 2\left[(bc)^{3/2}+(ca)^{3/2}+(ab)^{3/2}\right]$ olur. Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden $(bc)^{3/2}+(ca)^{3/2}+(ab)^{3/2}\geq 3abc$ dir. Böylece

$$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\geq 6abc \quad \ldots (2)$$

olur. (2) ve **1.3** den (1) eşitsizliği elde edilir.

1.9: $a^3(s-a)+b^3(s-b)+c^3(s-c)\leq abcs \quad \ldots (1)$

Çözüm: Verilen eşitsizlik

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)\geq 0 \quad \ldots (2)$$

eşitsizliğine denktir. (2) eşitsizliği ise Schur eşitsizliğinin özel bir hali olduğunu için sağlanır. (1) de eşitlik durumu ancak ve ancak $a=b=c$ iken vardır.

J. Andersson, Problem E 1779, AMM 59 (1952)

1.10: Her t reel sayısı için $a^t(s-a)+b^t(s-b)+c^t(s-c)\leq \frac{1}{2}abc\left(a^{t-2}+b^{t-2}+c^{t-2}\right)$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a=b=c$ iken sağlanır.

Bu sonuç D.Z. Djordjevic tarafından geliştirilmiştir.

1.11: $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$ dır. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

E. Catalan, Educational Times, NS 10 (1906)

1.12: $64s^3(s-a)(s-b)(s-c)\leq 27a^2b^2c^2$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

A. Padoa, Period Mat 6, (1926)

1.13: $q=(Q/2)^{1/2}$ olmak üzere

$$2(s-q)(2s+q)^2\leq 27abc\leq 2(s+q)(2s-q)^2 \ \ldots (1)$$

eşitsizliği vardır. (1) deki birinci ve ikinci eşitlikler sırasıyla tabanı en kısa ve en uzun olan ikizkenar üçgenlerde sağlanır . Elbette her iki eşitlik $q=0$ iken, yani üçgen eşkenarken sağlanır.

R. Frucht, Canad. J. Math 9 (1957)

1.14: $\frac{2s}{abc}\leq\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ … (1) dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

Çözüm: $(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2\geq(ca)(ab)+(ab)(bc)+(bc)(ca)$ eşitsizliğinden

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}$ yazılabilir. Ayrıca $\frac{2s}{abc}=\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}$ dir. Buradan (1) eşitsizliğinin sağlanacağını anlarız.

Gaz. Mat. B 10 (1962)

1.15: $\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geq\frac{9}{s}$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

1.16: $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2 \; \ldots$ (1) dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a = b = c$ iken sağlanır.

Çözüm: Aritmetik – harmonik ortalama eşitsizliğinden

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)} \; \ldots (2)$$

olup eşitlik durumu ancak ve ancak $a = b = c$ iken sağlanır.

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$ yazılabilir. (2) eşitsizliğinden (1) deki ilk eşitsizliğin sağlandığını anlarız.

$b+c > \frac{1}{2}(a+b+c)$, $c+a > \frac{1}{2}(a+b+c)$, $a+b > \frac{1}{2}(a+b+c)$ olduğundan

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{(a+b+c)} = 2$$

elde edilir. Bu ise (1) deki ikinci eşitsizliğin ispatıdır.

A. M. Nesbitt, Problem 15114, Educational Times 3 (1903)

M. Petrovic, Racunanje sa brojnim razmacima, Beograd 1932

HATIRLATMA: (1) deki ilk eşitsizlik negatif olmayan tüm reel sayılar için sağlanır.

1.17: $\frac{15}{4} \leq \frac{s+a}{b+c} + \frac{s+b}{c+a} + \frac{s+c}{a+b} < \frac{9}{2}$ dir. Eşitlik ancak ve ancak $a = b = c$ iken sağlanır.

Gaz. Mat. B 7, (1956)

1.18: $\left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{a}{c}\right) + 1 > \frac{c-a}{b} + \frac{b-a}{c}$ dir.

Gaz. Mat. B 15, (1964)

1.19: $\frac{1}{3} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2}$ dir. Eşitlik ancak ve ancak $a = b = c$ iken sağlanır.

M. Pertovic, Ens. Math. 18 (1916)

1.20: $\sqrt{s} < \sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-a} \le \sqrt{3s}$ dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

A. Santalo, Math. Notae 3, (1943)

E. G. Gotman Matematika v skole 1965

1.21: Tüm *t* reel sayıları için

$$2F \cdot \min\left[(abc)^{-2/3}, \left(\max(abc)\cdot\min(abc)\right)^{-1}\right] \cdot M_t(a,b,c)$$
$$\le M_t\left(h_a, h_b, h_c\right)$$
$$\le 2F \cdot \max\left[(abc)^{-2/3}, \left(\max(abc)\cdot\min(abc)\right)^{-1}\right] \cdot M_t(a,b,c)$$

O. Reuter, Elem. Math. 18 (1963)

1.22: Tüm *t* reel sayıları için

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b^{t-2}c^{t-2}+c^{t-2}a^{t-2}+a^{t-2}b^{t-2}\right) < 2\left(a^t+b^t+c^t\right)\left(a^{t-2}+b^{t-2}+c^{t-2}\right)$$

Çözüm: Barysentrik koordinatları a^t, b^t, c^t olan P noktasını göz önüne alalım. Bu halde

$$|PA|^2 = \frac{\left(a^t+b^t+c^t\right)\left(b^t c^2 + c^t b^2\right) - a^2 b^t c^t - b^2 c^t a^t - c^2 a^t b^t}{\left(a^t+b^t+c^t\right)^2}$$

olup

$$\frac{|PA|^2}{b^2c^2} = \frac{\left(a^t+b^t+c^t\right)\left(b^{t-2}+c^{t-2}\right) - a^2\left(b^{t-2}c^{t-2}+c^{t-2}a^{t-2}+a^{t-2}b^{t-2}\right)}{\left(a^t+b^t+c^t\right)^2}$$

yazılır. Benzer şekilde $\frac{|PB|^2}{c^2a^2}$, $\frac{|PC|^2}{a^2b^2}$ ifadeleri de yazılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\left(a^t+b^t+c^t\right)^2\left(\frac{|PA|^2}{b^2c^2}+\frac{|PB|^2}{c^2a^2}+\frac{|PC|^2}{a^2b^2}\right)$$

$$=2\left(a^t+b^t+c^t\right)\left(a^{t-2}+b^{t-2}+c^{t-2}\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b^{t-2}c^{t-2}+c^{t-2}a^{t-2}+a^{t-2}b^{t-2}\right)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı pozitif olduğundan, sağ tarafı da pozitif olacaktır.

L. Benezech, Problem 412 J. Math. Elem. Paris (1892)

1.23: $\left(a+b+c\right)^3 \le 5\left[bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)+ab\left(a+b\right)\right]-3abc$ ... (1) dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak üçgen eşkenar iken sağlanır.

Çözüm: $\left(a+b+c\right)^3 = a^3+b^3+c^3+9abc+3\left[bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)+ab\left(a+b\right)\right]-3abc$ ... (2) eşitliğine sahibiz. **1. 6** dan dolayı $a^3+b^3+c^3+9abc \le 2\left[bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)+ab\left(a+b\right)\right]$ dir. Bu eşitsizlik ve (2) den, (1) ifadesine ulaşırız.

S. Reich Problem E 1930, AMM 73 (1966)

1.24: $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) < 3+\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}$ dir.

C. Ionescu – Tiu, gaz. Mat. B 15 (1964)