

# POLİNOMLARDA İNDİRGENEBİLİRLİK

Derleyen

Osman EKİZ

Eskişehir Fatih Fen Lisesi

## 1. GİRİŞ

Polinomların indirgenebilmesi polinomların sıfırlarını bulmada oldukça önemlidir. Şimdi polinomların indirgenebilmesi ile ilgili bazı kriter ve yöntemleri anlatalım.

**Tanım.**  $P \in K[x]$  olmak üzere derecesi  $P$ 'den küçük en az birinci dereceden  $Q, R \in K[x]$  polinomları için  $P = Q.R$  oluyorsa  $P$ 'ye  $K$ 'da indirgenebilir polinom denir. Aksi halde  $P = Q.R$  olacak şekilde  $Q$  ve  $R$  polinomları yoksa  $P$ 'ye  $K$ 'da indirgenemez polinom denir.

$P(x) = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 2)$  olduğundan  $P$ 'ye  $Z$ 'de indirgenebilir.

$P(x) = x^2 - 2$  polinomu  $Z$ 'de indirgenemez olup  $P(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$  olduğundan  $R$ 'de indirgenebilir.

**Gauss Lemma.** Tam sayı katsayılı bir polinom  $Q$ 'da indirgenebilir ise  $Z$ 'de de indirgenebilir.

### 1. Rasyonel Kök Teoremi.

$P \in Z[x]$  ve  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  için  $r, s$  aralarında asal olmak üzere  $P$ 'nin  $\frac{r}{s}$  gibi bir sıfırı var ise  $r|a_0$  ve  $s|a_n$  olmalıdır. Bu ifadenin

karşıtı doğru değildir. Yani  $r|a_0$  ve  $s|a_n$  şartını sağlayan  $\frac{r}{s}$  ifadesi  $P$ 'nin sıfırı olmak zorunda değildir.

Burada amacımız  $P$ 'nin  $\frac{r}{s}$  gibi bir rasyonel kökü olacağı varsayımından hareket edip  $r|a_0$  ve  $s|a_n$  ifadelerinden yola çıkarak olası tüm  $\frac{r}{s}$  değerlerini bulup bu değerleri denemektir.

**Sonuç 1.** Rasyonel kök teoreminin doğal bir sonucu,  $P$ , monik polinom olmak üzere  $P$ 'nin rasyonel kökü varsa bu kök tam sayı olmalıdır.

**1.1.**  $P(x) = 6x^4 + 17x^3 + 7x^2 - 8x - 4$  polinomu  $Z$ 'de indirgenebilir mi?

**Çözüm:**  $\frac{r}{s}$ ,  $P(x) = 0$  denkleminin rasyonel kökü ise  $r|4$  ve  $s|6$  olup mümkün  $\frac{r}{s}$  değerleri  $\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{1}{2}$  olup bu değerler polinomda yerine yazılıp denenirse  $-2, -1, -\frac{1}{2}$  ve  $\frac{2}{3}$ 'ün polinomun kökleri olduğu görülebilir. Bu durumda  $6x^4 + 17x^3 + 7x^2 - 8x - 4 = (x+2)(x+1)(2x+1)(3x-2)$  olup polinom  $Z$ 'de indirgenebilirdir.

**1.2.**  $16x^5 - 16x^3 + 4x^2 + 3x - 1 = 0$  denkleminin kaç farklı reel kökü vardır?

**Çözüm:** Rasyonel kök teoreminden muhtemel kökler denkleme yerine yazılırsa  $\pm\frac{1}{2}$ 'nin verilen ifadeyi sağladığı görülebilir. Verilen ifadenin  $4x^2 - 1$  şeklinde bir çarpanı olmalıdır. Polinom bölmesinden diğer çarpan  $4x^3 - 3x + 1$  olur.  $4x^3 - 3x + 1$  içinde rasyonel kök teoremi uygulanırsa  $-1$  kök olmalıdır. Bu du-

rumda  $4x^3 - 3x + 1$  ifadesi  $x + 1$  ile tam bölünür. Polinom bölmesinden  $4x^3 - 3x + 1 = (4x^2 - 4x + 1)(x + 1)$  olup Bu durumda

$$16x^5 - 16x^3 + 4x^2 + 3x - 1 = (4x^2 - 1)(4x^2 - 4x + 1)(x + 1)$$

$$= (2x - 1)^3 (2x + 1)(x + 1) \text{ olup } x = \frac{1}{2}, x = -1 \text{ olup 3}$$

farklı reel kök vardır.

**1.3.**  $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 16x - 8 = 0$  denkleminin kaç farklı reel kökü vardır?

**Çözüm:** Rasyonel kök teoreminden bu denklemin kökleri  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$  sayılarından herhangi biri olabilir. Bu sayılar denkleme yerine yazıldığında 2'nin denklemini sağladığı görülür. O halde verilen ifadenin çarpanlarından biri  $x - 2$  olmalıdır. Polinom bölmesinden  $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 16x - 8 = (x - 2)(x^3 - 6x + 4)$  olur. Benzer şekilde  $x^3 - 6x + 4$  ifadesinin kökleri  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$  sayılarından herhangi biri olabilir. Sayılar yerine yazılıp kontrol edilirse 2'nin kök olduğu görülür. O halde  $x^3 - 6x + 4 = (x - 2)(x^2 + 2x - 2)$  olur. Bu durumda  $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 16x - 8 = (x - 2)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$  denkleminin 3 farklı reel kökü vardır.

**1.4.**  $75x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 12 = 0$  ve  $12x^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + 75 = 0$  denklemlerinin tam sayı olmayan rasyonel ortak kökleri  $k$  olup  $k$  negatiftir. Tam sayı katsayılı  $3hx^3 + hx^2 + jx - 40h = 0$  denkleminde  $h \neq 0$  ve denklemin bir kökü  $k$  ise diğer köklerinden büyük olanı kaçtır?

**Çözüm:** İlk iki denklemin ortak kökleri olan  $k$ , rasyonel kök teoreminden  $k = \pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{3}$  olacağından  $k = -\frac{1}{3}$  olmalıdır. Son denklemin kökler toplamı  $-\frac{h}{3h} = -\frac{1}{3}$  olduğundan  $k = -\frac{1}{3}$  dışındaki diğer iki kökü  $t, -t$  olur. Bu durumda kökler çarpımından  $t^2 = 40$  olup  $t = 2\sqrt{10}$  olur.

**Sonuç 2.** Rasyonel kökü olmayan her Kuadratik ve kübik polinom  $Z$ 'de indirgenemezdir.

## 2. Tahmin Metodu

Verilen polinomun derecesinden yol çıkarak polinomu daha küçük dereceden polinomların çarpımı şeklinde yazıp polinom eşitliğinden bilinmeyen katsayıları bulmaya çalışacağız.

**2.1.**  $P(x) = x^3 - 2x + 1$  polinomu  $Z$ 'de indirgenebilir mi?

**Çözüm:** Polinom indirgenebilirse bir ve ikinci dereceden iki monik polinomun çarpımı şeklinde yazılabilmelidir. O halde

$P(x) = x^3 - 2x + 1 = (x + a)(x^2 + bx + c)$  olup sağ taraf çarpılıp düzenlenirse

$x^3 - 2x + 1 = x^3 + (a + b)x^2 + (c + ab)x + ac$  olup  $a + b = 0, c + ab = -2, ac = 1$

olur.  $ac = 1 \Rightarrow (a, c) = (1, 1), (-1, -1)$  olur.

$(a, c) = (1, 1)$  için  $a + b = 0 \Rightarrow b = -1$  olup  $c + ab = 0$  çelişkisi elde edilir.

$(a, c) = (-1, -1)$  için  $a + b = 0 \Rightarrow b = 1$  olup  $c + ab = -2$  olduğundan

$P(x) = x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$  olur. O halde polinom  $Z$ 'de indirgenebilir.  $x^2 + x - 1$ ,  $Z$ 'de indirgenemez olduğundan  $P(x)$  başka şekillerde yazılamaz.

**2.2.**  $P(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 5$  polinomu  $Z$ 'de indirgenebilir mi?

**Çözüm:** Rasyonel kök teoreminden mümkün olan kökler  $\pm 1, \pm 5$  olup bu değerler polinomda yerine yazılırsa kök olmadığı görülebilir.

O halde polinom indirgenebilir ise ikinci dereceden monik iki polinomun çarpımı şeklinde yazılabilmelidir.

$x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 5 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$   
 $= x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$  olur. Bu durumda  $a + c = -1$ ,  $ac + b + d = 4$ ,  $ad + bc = 3$  ve  $bd = 5$  olur.  $bd = 5$  için  $b = 1$  ve  $d = 5$  durumundan  $a = 1$  ve  $c = -2$  olup

$x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 5 = (x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 5)$  olduğundan polinom  $Z$ 'de indirgenbilirdir.

**2.3.**  $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 6x + 1$  polinomu  $Z$ 'de indirgenbilir mi?

**Çözüm:** Rasyonel kök teoreminden muhtemel kökler  $\pm 1$  olup bu değerler  $P(x) = 0$  denklemini sağlamaz. O halde bu polinom indirgenbilir ise ikinci dereceden monik iki polinomun çarpımı şeklinde yazılabilmelidir. O halde

$$x^4 + x^3 + x^2 + 6x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \text{ için}$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + 6x + 1 = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd \text{ olup}$$

$bd = 1$ ,  $ad + bc = 6$ ,  $ac + b + d = 1$  ve  $a + c = 1$  olmalıdır.

$(b, d) = (1, 1)$  için  $ac + b + d = 1 \Rightarrow ac = -1$  olup  $a + c = 1$  olacak şekilde  $a, c$  tam sayıları yoktur.

$(b, d) = (-1, -1)$  için  $ac + b + d = 1 \Rightarrow ac = 3$  olup  $a + c = 1$  olacak şekilde  $a, c$  tam sayıları yoktur.

O halde polinom  $Z$ 'de indirgenemezdir.

### 3. Eisenstein İndirgenemezlik Kriteri

$P \in Q[x]$ ,  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  ve  $p$  asal olsun. Eğer  $p$ ,  $a_n$ 'yi bölmez ve  $p$ ,  $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  sayılarını böler iken  $p^2$ ,  $a_0$ 'ı bölmez ise  $P$  polinomu  $Q$ 'da indirgenemezdir.

Buradan şu sonuç çıkarılmamalıdır. Yukarıdaki şartlar altında  $p^2 \mid a_0$  ise  $P$  polinomu  $Q$ 'da indirgenebilir diyemeyiz.

**3.1.**  $P(x) = x^5 + 6x^3 - 9x^2 + 6$  polinomu  $Z$ 'de indirgenemezdir. Çünkü  $p = 3$  için Eisenstein kriterinden indirgenemezdir.

**3.2.**  $P(x) = x^6 + 539x^5 - 511x + 847$  polinomu  $Z$ 'de indirgenebilir mi?

**Çözüm:**  $539 = 7^2 \cdot 11$ ,  $511 = 7 \cdot 73$  ve  $847 = 7 \cdot 11^2$  olup  $p = 7$  için Eisenstein kriterinden polinom  $Z$ 'de indirgenemezdir.

**3.3.**  $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x + 1$  polinomu  $Z$ 'de indirgenebilir mi?

**Çözüm:**  $x$  yerine  $x+1$  yazarsak  $x^4 + 3x^3 + 3$  polinomu elde edilir. Bu polinom  $p = 3$  için Eisenstein kriterinden indirgenemez olup  $P$ 'de indirgenemezdir.

**3.4.**  $p$  asal sayı olmak üzere  $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$  polinomunun  $Z$ 'de indirgenemez olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $P(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} \Rightarrow P(x+1) = \frac{x^p - 1}{x} = x^{p-1} + \binom{p}{p-1}x^{p-2} + \dots + \binom{p}{2}x + p$

olur.  $1 \leq k < p$  için  $p \mid \binom{p}{k}$  olup  $p^2$ ,  $p$ 'yi bölemeyeceğinden Eisenstein kriterinden  $P(x+1)$  polinomu  $Z$ 'de indirgenemez olup  $P$ 'de  $Z$ 'de indirgenemez olur.

#### 4. Özel Durumlar

Matematik olimpiyatlarında  $x^2 + x + 1$  ve  $x^2 - x + 1$  ifadeleri sık kullanılan ifadelerdir. Bu terimlerin bazen soruda verilen polinomun bir çarpanı olması ihtimali

başka terimlere nazaran daha yüksek olmaktadır. Bu işlerle uğraşan okuyucu bunu rahatlıkla görebilir. Bir polinomun çarpanları arasında  $x^2 + x + 1$  ve  $x^2 - x + 1$  ifadelerinin olup olmadığını anlamının en kolay yolu polinomu  $x^2 + x + 1$  ve  $x^2 - x + 1$  modunda incelemekten geçer.

Şimdi kullanışlı bir özellik verelim.

$x^3 - 1 \equiv (x - 1)(x^2 + x + 1) \equiv 0 \pmod{x^2 + x + 1}$  olduğundan  $x^3 \equiv 1 \pmod{x^2 + x + 1}$  ve benzer şekilde  $x^3 \equiv -1 \pmod{x^2 - x + 1}$ 'dir.

**4.1.**  $x^5 + x + 1$  polinomunu  $Z'$ de indirgenebilir mi?

**Çözüm:**  $x^5 + x + 1 \equiv x^3 \cdot x^2 + x + 1 \equiv x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{x^2 + x + 1}$  olduğundan polinom  $x^2 + x + 1$  ile tam bölünür. O halde polinom  $Z'$ de indirgenebilirdir. Polinom bölmesinden  $x^5 + x + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$  olur.

**4.2.**  $x^{10} + x^5 + 1$  polinomunu  $Z'$ de indirgenebilir mi?

**Çözüm:**  $x^{10} + x^5 + 1 \equiv (x^3)^3 \cdot x + x^3 \cdot x^2 + 1 \equiv x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{x^2 + x + 1}$  olduğundan polinom  $x^2 + x + 1$  ile tam bölünür. O halde polinom  $Z'$ de indirgenebilirdir. Polinom bölmesinden  $x^{10} + x^5 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$  olur.

**4.3.**  $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$  polinomunu  $Z'$ de indirgenebilir mi?

**Çözüm:**

$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \equiv -x + 2 + 3x^2 - 2x + 1 \equiv 3(x^2 - x + 1) \equiv 0 \pmod{x^2 - x + 1}$

olduğundan polinom  $x^2 - x + 1$  ile tam bölünür. O halde polinom  $Z'$ 'de indirgenemezdir. Polinom bölmesinden  $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x + 1)^2$  olur.

Benzer şekilde  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$  olduğu gösterilebilir.

**4.4 [UMO – 2011].**  $x^5 + x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 7x - 2$  polinomunun farklı reel köklerinin toplamı nedir?

- a) 0                      b) 1                      c) 2                      d) -2                      e) 7

**Çözüm:**  $x^5 + x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 7x - 2 \equiv x^2 + x - 4 - 7x^2 - 7x - 2$   
 $\equiv -6(x^2 + x + 1) \equiv 0 \pmod{x^2 + x + 1}$  olduğundan polinom  $x^2 + x + 1$  ile tam bölünür. Polinom bölmesinden  $x^5 + x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 7x - 2 = (x^2 + x + 1)(x^3 - 5x - 2)$  olur. Rasyonel kök teoreminden  $x^3 - 5x - 2$ 'nin bir kökünün  $-2$  olduğu görülebilir. Bu durumda  $x^3 - 5x - 2 = (x + 2)(x^2 - 2x - 1)$  olup polinomun farklı reel köklerinin toplamı vieta formüllerinden 0 olur.

**4.5 [UMO – 2004].**  $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$  denkleminin reel köklerinin toplamı nedir?

- a) 5                      b) 4                      c) 3                      d) 2                      e) 1

**Çözüm:**  $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$  ifadesini  $x^2 - x + 1$  modunda inceleyelim.  
 $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 \equiv -x + 4 + 5x^2 - 4x + 1 \equiv 5(x^2 - x + 1) \equiv 0 \pmod{x^2 - x + 1}$   
 olduğundan verilen ifade  $x^2 - x + 1$  ile tam bölünür. Polinom bölmesinden

$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 - 3x + 1)$  olup  $x^2 - 3x + 1$  ifadesinden reel kök gelip toplamı 3 olur.

**4.6.** Hangi pozitif  $n$  tam sayıları için  $x^2 + x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1$  'dir?

**Çözüm:**  $n = 3k$  için  $x^{6k} + x^{3k} + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{x^2 + x + 1}$

$n = 3k + 1$  için  $x^{6k+2} + x^{3k+1} + 1 \equiv x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{x^2 + x + 1}$

$n = 3k$  için  $x^{6k+4} + x^{3k+2} + 1 \equiv x + x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{x^2 + x + 1}$  olduğundan 3'e tam bölünmeyen pozitif tam sayılar için iddia doğrudur.

**4.7.**  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \mid x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  olduğundan

$x^5 \equiv 1 \pmod{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$  olur.  $\Rightarrow$

$x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1 \equiv x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$  olduğundan iddia doğrudur.

## 5. Karşıt Polinomlar

$a_0 \neq 0$  olmak üzere  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  polinomunda

$i = 0, 1, \dots, n$  için  $a_i = a_{n-i}$  ise  $P$  polinomuna karşıt polinom denir. Örneğin

$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ ,  $x^5 + 4x^3 + 4x^2 + 1$ ,  $7x^8 - 2x^6 + 4x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 7$

polinomları karşıt polinomlardır.

$P(x) = 0$  denkleminde de karşıt denklem denir.

$P(x)$ , derecesi  $2n$  olan karşıt polinom ve  $t = x + \frac{1}{x}$  olmak üzere  $P(x) = x^n Q(t)$

şeklinde yazılabilir. Burada  $Q(x)$   $n$ 'inci dereceden bir polinomdur.

$k \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $x^k + \frac{1}{x^k}$  ifadesi daima  $x + \frac{1}{x}$  cinsinden yazılabilir.

$$k = 2 \text{ için } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$$

$$k = 3 \text{ için } x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = t^3 - 3t$$

$$k = 4 \text{ için } x^4 + \frac{1}{x^4} = t^4 - 4t^2 + 2$$

$$k = 5 \text{ için } x^5 + \frac{1}{x^5} = t^5 - 5t^3 + 5t$$

Şimdi karşıt bir polinomu çarpanlarına ayırmaya çalışalım

**5.1.**  $P(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - x^2 + 1$  polinomunu  $\mathbb{Z}$ 'de çarpanlarına ayırınız.

**Çözüm:** 
$$P(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - x^2 + 1 = x^3 \left( x^3 - x + 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$= x^3 \left( x^3 + \frac{1}{x^3} - \left( x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right) \text{ olur.}$$

$$P(x) = x^3 \left( \left( x + \frac{1}{x} \right)^3 - 4 \left( x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right) = x^3 (t^3 - 4t + 3) \text{ olur. } t^3 - 4t + 3 \text{ polinomu}$$

$t - 1$  ile tam bölüldüğünden  $t^3 - 4t + 3 = (t - 1)(t^2 + t - 3)$  olur. Bu durumda

$$P(x) = x^3 (t - 1)(t^2 + t - 3) \text{ olup } t \text{ yerine tekrar } x + \frac{1}{x} \text{ yazıp düzenlersek}$$

$$P(x) = x^3 \left( \frac{x^2 - x + 1}{x} \right) \left( \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x + 1}{x} \right) \text{ olup}$$

$P(x) = (x^2 - x + 1)(x^4 + x^3 - x^2 + x + 1)$  şeklinde polinomu çarpanlarına ayırmış oluruz. Dikkat edilirse  $x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$  polinomu da karşıt polinom olup benzer şekilde  $x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 = x^2 \left( x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 1 \right) = x^2 (t^2 + t - 3)$  olup  $t^2 + t - 3$  polinomu  $Z'$ 'de indirgenemez olduğundan  $x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$  polinomu da  $Z'$ 'de indirgenemezdir.

**5.2.[UMO – 2004].**  $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$  denkleminin reel köklerinin toplamı nedir?

- a) 5                      b) 4                      c) 3                      d) 2                      e) 1

**Çözüm:**  $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = x^2 \left( x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \left( x + \frac{1}{x} \right) + 5 \right)$   
 $= x^2 (t^2 - 4t + 3) = x^2 (t-1)(t-3)$   
 $= x^2 \left( \frac{x^2 - x + 1}{x} \right) \left( \frac{x^2 - 3x + 1}{x} \right)$  olduğundan

$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 - 3x + 1)$  olur.  $x^2 - 3x + 1$  ifadesinden reel kök gelip toplamı 3 olur.

## Alıştırmalar

1.  $x^{10} + x^9 + \dots + x + 1$  polinomunu  $Z'$ 'de indirgenebilir mi?
2.  $x^4 + x + 1$  polinomunu  $Z'$ 'de indirgenebilir mi?
3.  $x^4 + x^3 + x^2 + 6x + 1$  polinomunu  $Q'$ 'de indirgenebilir mi?
4.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  farklı tam sayılar ise  $P(x) = (x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$  polinomunun  $Z'$ 'de indirgenemez olduğunu gösteriniz.

5. Hangi pozitif  $n$  tam sayıları için  $37 \mid 10 \dots 010 \dots 01$  'dir?  
 $n$  tane  $n$  tane

6.  $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$  denkleminin reel köklerinin toplamı kaçtır?

7.  $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$  denkleminin reel köklerinin çarpımı kaçtır?

8.  $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$  denkleminin reel köklerinin toplamı kaçtır?

9 [UMO – 2006].  $4x^4 - 3x^2 + 7x - 3 = 0$  denkleminin farklı reel köklerinin toplamı nedir?

a) -1                      b) -2                      c) -3                      d) -4                      e) Hiçbiri

10.  $x^9 + x^4 - x - 1$  polinomunu çarpanlarına ayırınız.

11. Hangi pozitif  $n$  tam sayıları için  $x^2 + x + 1 \mid (x-1)^n - x^n - 1$  'dir?

12. Hangi pozitif  $n$  tam sayıları için  $x^2 + x + 1 \mid (x+1)^n + x^n + 1$  'dir?