PROBLEM ÇÖZÜMLERİNDE POLİNOMLARIN KULLANIMI

Derleyen
Osman EKİZ
Eskişehir Fatih Fen Lisesi

1. GİRİŞ

Bu yazıda bazı problemlerin çözümünde polinomlar ve özelliklerinin nasıl kullanıldığını anlatmaya çalışacağız. Bunun için problemdeki veriler yardımıyla bir polinom tanımlayıp polinomların özelliklerinden yola çıkarak problem çözülmeye çalışılacaktır.

2. Kullanışlı Bir Özdeşlik

Kökleri a,b,c olan üçüncü dereceden $P(x)$ polinomunu

$P(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$ şeklinde yazabiliriz. O halde $P(a)=P(b)=P(c)=0$ olup $P(a)+P(b)+P(c)=0$ olmalıdır. Bu durumda

$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)+(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc=0$ olup

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)-(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc \qquad (1)$$

olacağından ifade tekrar düzenlenirse

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right) \qquad (2)$$

özdeşliğini elde ederiz.

Eğer $a+b+c=0$ ise $a^3+b^3+c^3=3abc$ $\qquad (3)$

Ayrıca yukarıdaki mantık yardımıyla 4. dereceden bir polinom kullanarak $a^4+b^4+c^4+d^4$ içinde bir özdeşlik elde edilebilir.

3. (3) İçin Bazı Uygulamalar

3.1. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: $a=x-y, b=y-z$ ve $c=z-x$ için $a+b+c=0$ olduğundan (3)'den $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$ olacaktır.

3.2. $\sqrt[3]{3\sqrt{21}+8}-\sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}$ ifadesinin bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sqrt[3]{3\sqrt{21}+8}-\sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}=x$ olsun. O halde $x+\sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}+\sqrt[3]{-\left(3\sqrt{21}+8\right)}=0$ olur. $a=\sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}, b=\sqrt[3]{-\left(3\sqrt{21}+8\right)}$ için $a+b+x=0$ olup (3)'den $x^3+a^3+b^3=3xab \Rightarrow x^3-16=15x \Rightarrow$ $x^3+15x-16=0 \Rightarrow (x-1)\left(x^2+x+16\right)=0 \Rightarrow x=1$'dir.

3.3.[UMO – 2012]. Aşağıdaki x değerlerinden hangisi $\sqrt[3]{6+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{3}$ eşitliğini sağlar?

a) 27 a) 32 a) 45 a) 52 a) 63

Çözüm: $\sqrt[3]{6+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{x}}+\sqrt[3]{-3}=0$ olup $a=\sqrt[3]{6+\sqrt{x}}, b=\sqrt[3]{6-\sqrt{x}}, c=\sqrt[3]{-3}$ için $a+b+c=0$ olup (3)'den $a^3+b^3+c^3=3abc \Rightarrow 9=3\sqrt[3]{-3}\sqrt[3]{36-x} \Rightarrow$ $-9=36-x \Rightarrow x=45$ olur.

Bu problem iki defa küp alınıp biraz işlem yaptıktan sonra da çözülebilir. Ancak zamana karşı yarışılan bir sınavda pek kullanışlı olmayabilir.

3.4. $\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=1$ ise $x^3-\dfrac{1}{x^3}$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm: $\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=1 \Rightarrow \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{x}}+\sqrt[3]{-1}=0$ olup (3)'ten

$x-\dfrac{1}{x}-1=3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{-\dfrac{1}{x}}\cdot\sqrt[3]{-1}=3 \Rightarrow x-\dfrac{1}{x}=4$ olup

$x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=76$ olur.

Alıştırmalar

1. $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=4$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

2. $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

3. $\sqrt[3]{8x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}$ denkleminin rasyonel köklerinin çapımı kaçtır?

4. $(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

5. a,b,c rasyonel sayılar olmak üzere $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ ise $a=b=c=0$ olduğunu gösteriniz.

6. x, y, z reel sayılar, $x^3+y^3+z^3\neq 0$ olmak üzere

$\dfrac{2xyz-(x+y+z)}{x^3+y^3+z^3}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x+y+z=0$ olduğunu gösteriniz.

(2) Özdeşliliğinden devam edelim.

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ olduğunu biliyoruz.

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ ifadesini 2 ile çarpar ve bölersek

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2} \qquad (4)$$

olup $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ olduğundan $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0$ olup

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca \qquad (5)$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

Şimdi bu eşitsizlik üzerinden farklı eşitsizlikler elde edelim.,

4. (4) Özdeşliğinin Uygulamaları

4.1. Kenar uzunlukları a, b, c olan ve $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ koşulunu gerçekleyen, birbirine benzer olmayan kaç üçgen vardır?

Çözüm: $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)=0$ olduğundan $a=b=c$ olup tek üçgen vardır.

4.2. a,b,c pozitif reel sayılar olmak üzere $a+b+c=1$ ve $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$ ise $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ ifadesi kaç farklı değer alabilir?

Çözüm: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=2\left[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\right]=0$ olduğundan $a=b=c$ olup $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$ olup tek değer alır.

4.3. x, y, z pozitif reel sayılar olmak üzere $x+y+z=27$ ve $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$ şartlarını sağlayan kaç tane (x, y, z) üçlüsü vardır?

Çözüm: $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\dfrac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2}=0$ olduğundan $x=y=z$ olup $(x, y, z)=(9,9,9)$ tek çözümdür.

5. (5) Eşitsizliğinin Bazı Uygulamaları

5.1. $x, y, z \in R^+$ için $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} \geq 1$'dir.

5.2. $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geq 3(xy+yz+zx)$

olup $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ olur. Eğer $x, y, z \in R^+$ ise $\dfrac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geq 3$

olur.

5.4. $x, y, z \in R^+$ için $x^4+y^4+z^4 \geq xyz(x+y+z)$'tir.

Çözüm: $x^4+y^4+z^4=\left(x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+\left(z^2\right)^2$ olup (5)'den

$x^4+y^4+z^4 \geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ olup tekrar (5)'den

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq xy.yz+yz.zx+zx.xy=xyz(x+y+z)$ olur.

5.5. $x, y, z \in R^+$ için $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c} \geq a+b+c$'dir.

Çözüm: $x=\sqrt{\dfrac{bc}{a}}, y=\sqrt{\dfrac{ca}{b}}, z=\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$ alıp (5) eşitsizliğinden istenen elde edilir.

5.6. $x+y+z \geq 0$ ise $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ 'dir.

Çözüm: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left((x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right)$ olup $(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx) \geq$ olduğunu göstermeliyiz. $\Rightarrow$ (5)'den $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx) \geq 3(xy+yz+zx) \Rightarrow$ $(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx) \geq 0$ olur. İstenen elde edilir.

Bu problemde $a=x^3, b=y^3, c=z^3$ için $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ olup üç terim için Aritmetik Orta – Geometrik Orta eşitsizliğini elde ederiz.

5.7. $a,b,c \in R^+$ ve $a^2+b^2+c^2=1$ ise $S=\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulalım.

Çözüm: $S^2=\dfrac{a^2b^2}{c^2}+\dfrac{b^2c^2}{a^2}+\dfrac{c^2a^2}{b^2}+2\left(\dfrac{ab}{c}\cdot\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ab}{c}\cdot\dfrac{ca}{b}+\dfrac{bc}{a}\cdot\dfrac{ca}{b}\right)$

$S^2=\dfrac{a^2b^2}{c^2}+\dfrac{b^2c^2}{a^2}+\dfrac{c^2a^2}{b^2}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)=\dfrac{a^2b^2}{c^2}+\dfrac{b^2c^2}{a^2}+\dfrac{c^2a^2}{b^2}+2$ olur. (5) eşitsizliğinden

$\dfrac{a^2b^2}{c^2}+\dfrac{b^2c^2}{a^2}+\dfrac{c^2a^2}{b^2} \geq \dfrac{ab}{c}\cdot\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ab}{c}\cdot\dfrac{ca}{b}+\dfrac{bc}{a}\cdot\dfrac{ca}{b}=a^2+b^2+c^2=1 \Rightarrow S^2 \geq 3 \Rightarrow$

$S \geq \sqrt{3}$ olup $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ için eşitlik sağlanır.

6. Polinomlar Yardımıyla Problem Çözmek

Şimdi bir problemi polinomların diline nasıl çevirebileceğimiz hakkında örnekler verelim.

6.1. $a,b,c\in R$ ve $a\neq b$ olmak üzere $c^3=a^3+b^3+3abc$ ise $c=a+b$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1: $P(x)=x^3-3abx-a^3-b^3$ polinomunu ele alalım. $P(a+b)=0$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. O halde $P(x)$ polinomu $x-(a+b)$ ile tam bölünür. Bu durumda $P(x)=\left[x-(a+b)\right]\left[x^2+(a+b)x+a^2-ab+b^2\right]$ olup polinomun tek reel kökü vardır. Çünkü $x^2+(a+b)x+a^2-ab+b^2$ ifadesinin diskriminantı $\Delta=-3(a-b)^2<0$ 'dır. O halde $a+b$, polinomun tek reel köküdür. $c^3=a^3+b^3+3abc\Rightarrow P(c)=0$ olup c 'de bu polinomun reel kökü olduğundan $c=a+b$ olmalıdır.

Çözüm 2: $c^3=a^3+b^3+3abc\Rightarrow c^3=a^3+b^3+(-c)^3=3ab(-c)$ olup (3) özdeşliliğinden $a+b+(-c)=0\Rightarrow c=a+b$ olur.

6.2. $a,b,c\in R^+$ ve $c>a+b$ ise $a^3+b^3+c^3+3abc>2(a+b)^2c$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $P(c)=c^3+3abc-2(a+b)^2c+a^3+b^3>0$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun içinde $\forall x>a+b$ için $P(x)>0$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$P(x)=x^3+3abx-2(a+b)^2x+a^3+b^3$ polinomunu tanımlayalım.

$P(a+b)=0$ olduğu temel işlemler yardımıyla gösterilebilir. O halde polinom $x-(a+b)$ ile tam bölünür. Bu durumda

$P(x)=(x-a-b)\left(x^2+(a+b)x-a^2+ab-b^2\right)$ olur.

$$x^2+(a+b)x-a^2+ab-b^2\geq(a+b)^2+(a+b)(a+b)-a^2+ab-b^2$$
$$=a^2+5ab+b^2>0 \text{ olup}$$

$P(c)=(c-a-b)\left(c^2+(a+b)c-a^2+ab-b^2\right)$ için $c-a-b>0$ ve $c^2+(a+b)c-a^2+ab-b^2\geq 0$ olduğundan $P(c)>0$ olup istenen elde edilir.

6.3. $x\leq y\leq z$ olmak üzere $x+y+z=4$, $x^2+y^2+z^2=14$, $x^3+y^3+z^3=34$ denklem sisteminin (x, y, z) çözümlerinin sayısı kaçtır?

Çözüm: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ olduğundan $xy+yz+zx=1$ olur. 3. dereceden P(t) polinomunun kökleri x, y, z olsun. Bu durumda $P(t)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz \Rightarrow P(t)=t^3-4t^2+t-xyz$ olur. x, y, z bu polinomun kökleri olduğundan

$$x^3-4x^2+x-xyz=0$$
$$y^3-4y^2+y-xyz=0$$
$$z^3-4z^2+z-xyz=0$$

olup taraf tarafa toplar düzenlersek $xyz=-6$ olur. Bu durumda $P(t)=t^3-4t^2+t+6=(t+1)(t-2)(t-3)$ olup $x=-1, y=2, z=3$ bulunur.

Not. Bu problem (2) özdeşliği kullanılarak da çözülebilir.

6.4. *a*, *b*, *c* farklı reel sayılar olmak üzere $a^3=3\left(b^2+c^2\right)-25$, $b^3=3\left(c^2+a^2\right)-25$ ve $c^3=3\left(a^2+b^2\right)-25$ ise *a*.*b*.*c* kaçtır?

Çözüm: $x^3-px^2+qx+r=0$ denkleminin kökleri a, b, c olsun. Bu durumda $p=a+b+c$, q = ab + bc + ca ve $r=abc$ olup $a^2+b^2+c^2=p^2-2q$ olacaktır.

$a^3 = 3(b^2 + c^2) - 25 \Rightarrow a^3 = 3(p^2 - 2q - a^2) - 25$

$\Rightarrow a^3 + 3a^2 + 25 + 6q - 3p^2 = 0$ olur. Dolayısı ile a sayısı $x^3 + 3x^2 + 25 + 6q - 3p^2 = 0$ denkleminin bir köküdür. Benzer şekilde b ve c'nin de $x^3 + 3x^2 + 25 + 6q - 3p^2 = 0$ denkleminin kökleri olduğu gösterilebilir. Bu durumda $x^3 - px^2 + qx + r$ ve $x^3 + 3x^2 + 25 + 6q - 3p^2$ ifadeleri birbirine eş olup $p = -3$, $q = 0$ ve $r = 25 + 6q - 3p^2 = -2$ olacaktır. Yani $abc = r = -2$ olur.

Alıştırmalar

1. a,b,c farklı reel sayılar olmak üzere uygun $p \in R$ için $a(a^2 + p) = b(b^2 + p) = c(c^2 + p)$ ise $a + b + c = 0$ olduğunu gösteriniz.

2. $a,b,c \in R$ ve $a + b + c = 0$ ise $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2$ olduğunu gösteriniz.

3. $a,b,c \in R$ ve n tek doğal sayı olmak üzere $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ ise $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^n = \frac{1}{a^n + b^n + c^n} = \frac{1}{(a+b+c)^n}$ olduğunu gösteriniz.