

Soru: $|AB| = |AC|$ ve $m(\angle BAC) = 20^\circ$ olan ABC üçgeninin $[AC]$, $[AB]$ kenarları üzerinden sırasıyla D , E noktaları alınıyor. $m(\angle ABD) = 10^\circ$, $m(\angle ACE) = 20^\circ$ ise $m(\angle BDE) = x$ kaç derecedir?

Çözüm (*L. Gökçe*): Trigonometrik çözüm verelim. Bunun için çözümümüzde kullanacağımız

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

eşitliğini ispat edelim.

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ve $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ özdeşliklerine sahibiz.

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ &= \frac{1}{2}(\cos(40^\circ - 20^\circ) - \cos(40^\circ + 20^\circ)) \cdot \sin 80^\circ \\ &= \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \cos 10^\circ = \frac{1}{4}(2\cos 20^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 10^\circ) \\ &= \frac{1}{4}(2(2\cos^2 10^\circ - 1) \cdot \cos 10^\circ - \cos 10^\circ) \\ &= \frac{1}{4}(4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ) = \frac{1}{4}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

Şimdi asıl problemin çözümüne geçelim:

BCD , BCE , BED üçgenlerinde sinüs teoremini uygularsak

$$\frac{|BC|}{\sin 30^\circ} = \frac{|BD|}{\sin 80^\circ}, \frac{|BC|}{\sin 40^\circ} = \frac{|BE|}{\sin 60^\circ}, \frac{|BD|}{\sin(x+10^\circ)} = \frac{|BE|}{\sin x}$$

olup bu eşitliklerden $\sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin(x+10^\circ) = \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ \cdot \sin x$ elde edilir. Eşitliğin her iki tarafını $\sin 20^\circ$ ile genişletelim,

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin(x+10^\circ) = \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 20^\circ \cdot \sin(x+10^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{8} \sin x$$

$$\Rightarrow \cos(x+10^\circ - 20^\circ) - \cos(x+10^\circ + 20^\circ) = \sin x$$

$$\Rightarrow \cos(x-10^\circ) = \cos(x+30^\circ) + \cos(90^\circ - x)$$

$$\Rightarrow \cos(x-10^\circ) = 2\cos 60^\circ \cdot \cos(30^\circ - x)$$

$$\Rightarrow \cos(x - 10^\circ) = \cos(30^\circ - x)$$

$$\Rightarrow x - 10^\circ = 30^\circ - x$$

$$\Rightarrow x = 20^\circ$$

