

KUADRATİK FONKSİYONLAR

ve

OLİMPİYAT UYGULAMALARI

Derleyen

Osman EKİZ

Eskişehir Fatih Fen Lisesi

1. GİRİŞ

$a, b, c \in R$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonuna 2. dereceden polinom fonksiyon denir. Literatürde bu fonksiyon tipi “*kuadratik fonksiyon*” olarak geçer.

10. sınıfta bu fonksiyon ve özellikleri hakkında epey bir bilgi verilmektedir. Bu bilgileri şu şekilde sınıflandırabiliriz,

i. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerinin varlığı, kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkiler,

ii. $ax^2 + bx + c$ ifadesini içeren eşitsizlikler ve çözüm kümeleri,

iii. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği ve özellikleri,

iv. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun alabileceği en büyük ve en küçük değer,

Bu yazıda bazı olimpiyat problemleri ile *kuadratik fonksiyonlar* arasında bir bağ kurup problemi *kuadratik fonksiyonların* özelliklerinden faydalanarak problemi

çözmeye çalışacağız. Öyle ki görünüşü itibariyle oldukça zor olan bazı problemler bir çırpıda hem de 10. sınıf bilgileriyle rahatlıkla çözülebilecektir.

Şimdi ihtiyacımız olan bilgileri kısaca verelim.

2. Kuadratik Fonksiyonlar ve Temel Özellikleri

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere 2. dereceden $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunu ele alalım. Fonksiyonu

$$f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (1)$$

şeklinde yazabiliriz. Her x reel sayısı için $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ olup eşitlik ancak ve ancak

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad (2)$$

durumunda geçerlidir. Ayrıca $b^2 - 4ac$ ifadesine $f(x)$ 'in diskriminantı denir ve " Δ " sembolü ile gösterilir. O halde

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (3)$$

olarak numaralandıralım.

$a > 0$ olsun. (1)'den dolayı $f(x) \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ olup eşitlik $x_0 = -\frac{b}{2a}$ durumundan geçerli olur. O halde

2.1. $a > 0$ ise $\forall x \in R$ için $f(x) \geq f(x_0)$ 'dır. Bu durumda $f(x)$ 'in alabileceği en küçük değer $f(x_0) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ 'dır.

2.2. $a < 0$ ise $\forall x \in R$ için $f(x) \leq f(x_0)$ 'dır. Bu durumda $f(x)$ 'in alabileceği en büyük değer $f(x_0) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ 'dır.

Şimdi $f(x) = 0$ denkleminin köklerine bakalım.

(1)'den $f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ olur. Bu durumda

2.3. $\Delta > 0$ ise denklemin farklı iki reel kökü vardır.

2.4. $\Delta < 0$ ise denklemin reel kökü yoktur.

2.5. $\Delta = 0$ ise denklemin birbirine eşit iki reel kökü vardır.

2.6. $f(x) = 0$ denkleminin x_1, x_2 gibi iki kökü olduğundan $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ için

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ ve } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (4)$$

olacaktır.

$a > 0$ olmak üzere $\forall x \in R$ için $f(x) > 0$ ise $f(x) = 0$ denkleminin reel kökü olamaz. O halde $\Delta < 0$ olmalıdır. O halde

2.7. $\forall x \in R$ için $f(x) > 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$ olmalıdır.

2.8. $a > 0$ için $\Delta > 0$ ise $f(x) = 0$ denkleminin x_1, x_2 gibi farklı iki reel kökü vardır. $x_1 > x_2$ olmak üzere $f(x) > 0$ ise $x < x_2$ veya $x > x_1$ 'dir. $f(x) < 0$ ise $x_2 < x < x_1$ 'dir.

3. Eşitsizlik Problemlerinde Kuadratik Fonksiyonların Uygulamaları

3.1. $x, y \in R^+$ için $x + y = 2a$ ise xy 'nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: $x + y = 2a \Rightarrow y = 2a - x \Rightarrow xy = -x^2 + 2ax$ olup $f(x) = -x^2 + 2ax$ alırsak **2.2** ve (2)'den $f(x) \leq f(a) = a^2$ $x = y = a$ için eşitlik sağlanır.

3.2. $a, b, c \in R^+$ olmak üzere $a + b + c = abc$ ve $a^2 = bc$ ise $a \geq \sqrt{3}$ 'dür.

Çözüm: $a^2 = bc$ ve $b + c = abc - a = a^3 - a$ olduğundan b ve c sayıları $x^2 - (a^3 - a)x + a^2 = 0$ denkleminin kökleridir. O halde 2.3 ve 2.5'den $\Delta \geq 0$ olmalıdır. $\Rightarrow \Delta = (a^3 - a)^2 - 4a^2 \geq 0 \Rightarrow a^2(a^2 - 3)(a^2 + 1) \geq 0 \Rightarrow a^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow a \geq \sqrt{3}$ olur.

3.3. Verilen x_1, x_2, \dots, x_n reel sayıları için $S = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$ ifadesini minimum yapan x reel sayısını bulunuz.

Çözüm: $S = nx^2 + bx + c$ formunda olup $b = -2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ 'dir.

$S = nx^2 + bx + c$ ifadesi en küçük değerini 2.1'den $x = -\frac{b}{2n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

için alır.

3.4. $x, y, z \in R$ olmak üzere $(x - y)^2, (y - z)^2, (z - x)^2$ değerlerinden en küçüğünün $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$ 'den küçük veya eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Genelliği bozmadan $x \leq y \leq z$ kabul edelim. $a = y - x \geq 0$,
 $b = z - y \geq 0$ olmak üzere

$x^2 + y^2 + z^2 = (y - a)^2 + y^2 + (y + b)^2 = 3y^2 - 2(a - b)y + a^2 + b^2$ olup 2.1'den

bu ifade en küçük değerini $y = \frac{a - b}{3}$ için alır. O halde

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \geq \frac{\left(\frac{a - b}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{a - b}{3}\right)^2 + \left(\frac{a - b}{3} + b\right)^2}{2} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \text{ olur. } a \text{ ve}$$

b 'den küçük olana c dersek $\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \geq \frac{c^2 + c^2 + c^2}{3} = c^2$ olur.

$(y - x)^2, (z - y)^2$ ifadelerinden küçük olanı c^2 olduğundan istenen elde edilir.

3.5. a, b, c pozitif reel sayılar olmak üzere $(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$ ise a, b, c bir üçgenin kenar uzunlukları olur.

Çözüm: Verilen eşitsizlik $a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 < 0$ eşitsizliğine denktir.

$a^2 = x$ için $x^2 - 2(b^2 + c^2)x + (b^2 - c^2)^2 < 0$ olup

$f(x) = x^2 - 2(b^2 + c^2)x + (b^2 - c^2)^2$ denkleminin kökleri $x_1 = (b + c)^2$ ve

$x_2 = (b-c)^2$ olup $f(x) < 0$ ise **2.8'**den $x_2 < x < x_1$ olup $(b-c)^2 < x < (b+c)^2$
 $\Rightarrow (b-c)^2 < a^2 < (b+c)^2 \Rightarrow (b-c)^2 < a^2 < (b+c)^2 \mid b-c < a < b+c$ olur. Benzer şekilde $|b-a| < c < b+a$ ve $|a-c| < b < a+c$ olup a, b, c üçgen eşitsizliğini sağlar.

3.6. a, b, c pozitif reel sayılarının bir üçgenin kenar uzunlukları olması için gerek ve yeter şart $p + q = 1$ için $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ olmasıdır.

Çözüm: a, b, c bir üçgenin kenar uzunlukları ise $pa^2 + qb^2 - pqc^2 > 0$ eşitsizliğinin daima doğru olduğunu gösterelim.

$$f(p) = pa^2 + (1-p)b^2 - p(1-p)c^2 \Rightarrow f(p) = c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p^2 + b^2$$

olduğundan $\Delta = [(a^2 - b^2 - c^2) - 4b^2c^2] = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)$
 $= (a^2 - (b+c)^2)(a^2 - (b-c)^2) = (a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)$ olur.

Üçgen eşitsizliğinden $a-b-c < 0$ ve $a-b+c > 0, a+c-b > 0$ olduğundan $\Delta < 0$ olup **2.7'**den $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ olur.

Eğer $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ ise $\forall p \in R$ için $f(p) = c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p^2 + b^2 > 0$ olup **2.7'**den $\Delta < 0$ olmalıdır. Bu durumda

$\Delta = (a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c) < 0$ olmalıdır. O halde $b+c-a, a-b+c, a+b-c$ ifadelerinin hepsi pozitif veya ikisi negatif biri pozitif olmalıdır. İki negatif biri pozitif olmaz. Aksi halde $b+c-a < 0$ ve $a-b+c < 0$ olursa $c < 0$ çelişkisi elde edilir. O halde üçüde pozitif olursa a, b, c üçgen eşitsizliğini sağlar.

3.7. x_1, x_2, \dots, x_n reel sayılarından en büyüğü x_n ve en küçüğü x_1 'dir. Eğer $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ ise $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + nx_1x_2 \leq 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x) = x^2 - (x_1 + x_n)x + x_1x_n$ polinomunun sıfırları x_1 ve x_n 'dir. O halde (5.1)'den eğer $x_1 \leq x \leq x_n$ ise **2.8**'den $f(x) \leq 0$ olup $x_1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq x_n$ olduğundan $i = 1, 2, \dots, n$ için $f(x_i) \leq 0$ olur. \Rightarrow

$$0 \geq \sum_{i=1}^n f(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - (x_1 + x_n) \sum_{i=1}^n x_i + nx_1x_n = \sum_{i=1}^n x_i^2 + nx_1x_n \text{ olur.}$$

4. Cebirsel Ortalamalar İle Çözülen Bazı Problemlerin Çözümünde Kuadratik Fonksiyonlar

4.1. $a, b \in R^+$ için $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 'dir.

Çözüm 1: AGO'dan $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ olduğu aşikardır.

Çözüm 2: $a = x^2, b = y^2$ için $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall x \in R$ için $f(x) = x^2 - 2yx + y^2 \geq 0$ olacağından **2.7**'den $\Delta \leq 0$ olmalıdır. O halde $\Delta = (-2y)^2 - 4y^2 = 0 \leq 0$ olduğundan $f(x) \geq 0$ olup $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$ olur.

4.2. $a, b, c \in R^+$ olmak üzere $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ 'dir.

Çözüm 1: AGO'dan $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$ ve $c + a \geq 2\sqrt{ca}$ olup bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ olur.

Çözüm 2: $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ dersek $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Rightarrow x^2 - (y + z)x + y^2 + z^2 - yz \geq 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$f(x) = x^2 - (y + z)x + y^2 + z^2 - yz$ alırsak $\forall x \in R$ için $f(x) \geq 0$ ise 2.7'den $\Delta \leq 0$ olmalıdır. Gerçekten $\Delta = -3(y - z)^2 \leq 0$ olduğundan iddia doğru olup istenen elde edilir.

4.3. $a, b, c \in R^+$ için $6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$ için verilen eşitsizlik

$6x^2 + 4y^2 + 5z^2 \geq 5xy + 7xz + 3yz$ şeklini alır.

$f(x) = 6x^2 - (5y + 7z)x + 4y^2 + 5z^2 - 3yz \geq 0$ olup $\Delta = -71(y - z)^2 \leq 0$ olduğundan 2.7'den $\forall x \in R$ için $f(x) \geq 0$ olup istenen elde edilir.

4.4. Cauchy – Schwarz Eşitsizliği. u_1, u_2, \dots, u_n ve v_1, v_2, \dots, v_n keyfi reel sayılar olmak üzere;

$(u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)$ 'dir. Eşitlik

ancak ve ancak $k = 1, 2, \dots, n$ için $u_k = 0$ veya $\frac{u_k}{v_k} = t \in R$ iken geçerlidir.

İspat: $k = 1, 2, \dots, n$ için $u_k = 0$ ise iddianın doğruluğu aşıkardır. O halde

$k = 1, 2, \dots, n$ için $u_k \neq 0$ olsun. $f(x) = (u_1x - v_1)^2 + (u_2x - v_2)^2 + \dots + (u_nx - v_n)^2$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu $ax^2 - 2bx + c$ formunda olup $a = \sum_{k=1}^n u_k^2 > 0$,

$b = \sum_{k=1}^n u_kv_k$ ve $c = \sum_{k=1}^n v_k^2$ olur. $\Delta = 4(b^2 - ac)$ olup $\forall x \in R$ için $f(x) \geq 0$ oldu-

ğundan 2.7'den $\Delta \leq 0$ yani $b^2 \leq ac$ olur. Bu da bize isteneni verir. Eşitlik $\Delta = 0$

için mümkün olacağından $k = 1, 2, \dots, n$ için $(u_kx - v_k)^2 = 0$ olup $\frac{u_k}{v_k} = x \in R$ olur.

5. Denklem Çözümlerinde Kuadratik Fonksiyonlar

5.1. p ve q iki reel sayı ve $2p^2 - 3p - 1 = 0$, $q^2 + 3q - 2 = 0$ ve $pq \neq 1$ ise $\frac{pq + p + 1}{q}$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm: İkinci denklemi q^2 ile bölersek $2 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{q} - 1 = 0$ olup p ve $\frac{1}{q}$, $2x^2 - 3x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olur. Bu durumda (4)'den $p + \frac{1}{q} = \frac{3}{2}$ ve $\frac{p}{q} = -\frac{1}{2}$ olup $\frac{pq + p + 1}{q} = p + \frac{1}{q} + \frac{p}{q} = 1$ olacaktır.

5.2. p ve q iki reel sayı ve $19p^2 + 99p + 1 = 0$, $q^2 + 99q + 19 = 0$ ve $pq \neq 1$ ise $\frac{pq + 4p + 1}{q}$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm: İkinci denklemi q^2 ile bölersek $19 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^2 + 99 \cdot \frac{1}{q} + 1 = 0$ olup p ve $\frac{1}{q}$, $19x^2 + 99x + 1 = 0$ denkleminin kökleri olur. Bu durumda (4)'den $p + \frac{1}{q} = -\frac{99}{19}$ ve $\frac{p}{q} = \frac{1}{19}$ olup $\frac{pq + 4p + 1}{q} = p + \frac{1}{q} + 4 \cdot \frac{p}{q} = -5$ olacaktır.

5.3. $\frac{13x - x^2}{x + 1} \left(x + \frac{13 - x}{x + 1} \right) = 42$ denkleminin irrasyonel köklerinin toplamı kaçtır?

Çözüm: $\frac{13-x}{x+1} = y$ için verilen denklem $xy(x+y) = 42$ şeklini alır. Şimdi $xy + (x+y)$ değerini hesaplayalım. $xy + (x+y) = \frac{13x-x^2}{x+1} + \frac{x^2+13}{x+1} = 13$ 'tür. Bu durumda kökleri xy ve $x+y$ olan denklem $x^2 - 13x + 42 = 0$ olup bu denklemin kökleri 6 ve 7 olduğundan $xy = 6$, $x+y = 7$ veya $xy = 7$, $x+y = 6$ olmalıdır. Bu denklemler çözümlerse $x = 1, 6, 3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}$ ana denklemin irrasyonel köklerinin toplamı 6 olur.

5.4. a, b, c bir üçgenin kenar uzunlukları olup $a > b > c$, $2b = a + c$, b tam sayı ve $a^2 + b^2 + c^2 = 84$ ise b kaçtır?

Çözüm: $ac = \frac{(a+c)^2 - (a^2 + c^2)}{2} = \frac{5b^2 - 84}{2}$ ve $2b = a + c$ olduğundan $x^2 - 2bx + \frac{5b^2 - 84}{2} = 0$ denkleminin reel kökleri a ve c olur. Bu denklemin deltası pozitif olacağından $\Delta = 4b^2 - 2(5b^2 - 84) = -6b^2 + 168 > 0 \Rightarrow b^2 < \frac{168}{6} = 28$ olur. $0 < ac = \frac{5b^2 - 84}{2} \Rightarrow 16 < b^2 \Rightarrow 4 < b < 6$ olacağından $b = 5$ olur.

6. Tamsayılarda Denklemler ve Kuadratik Fonksiyonlar

$a, b, c \in Z$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri tam sayı ise $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ifadesi tam sayı olup $\sqrt{\Delta} \in Z \Rightarrow \Delta$ tam kare olmalıdır.

6.1 m pozitif tam sayı olmak üzere $x^2 + 2(m+5)x + 100m + 9 = 0$ köklerinin tam sayı olmasını sağlayan kaç tane m değeri vardır?

Çözüm: Denklem köklerinin tam sayı olması için deltasının tam kare olması gerekir. Bu durumda $\Delta = m^2 - 90m + 16 = n^2 \Rightarrow (m-45)^2 - 2009 = n^2 \Rightarrow (m-n-$

45). $(m + n - 45) = 2009 = 1.2009 = 41.49 = (-49).(-41) = (-2009).(-1)$ olup gerekli durumlar incelenirse $m = 1050, 90, -960, 0$ olup 4 tane m değeri vardır.

6.2. $x^2 + 4xy + y^2 = 11$ tam sayılardaki çözüm ikililerinin sayısı kaçtır?

Çözüm: $x^2 + 4xy + y^2 - 11 = 0$ denklemini x 'e bağlı ikinci dereceden bir denklem olarak düşünersek denklemin tam sayı çözümlerinin olabilmesi için diskriminantının tam kare olması gerekir. Yani $16y^2 - 4y^2 + 44 = a^2$ olacak şekilde bir a tamsayısı olmalıdır.

$16y^2 - 4y^2 + 44 = a^2 \Rightarrow 12y^2 + 44 = a^2$ olur. Bu denklem mod3'te incelenirse $a^2 \equiv 2 \pmod{3}$ olur. Bir tam kare mod3'te 2'ye denk olamayacağından verilen şartları sağlayan bir a tamsayısı mevcut olmayıp denklemin çözüm kümesi boştur.

6.3. $x + y = x^2 - xy + y^2$ denkleminin tamsayılarda kaç tane çözüm ikilisi vardır?

Çözüm 1: $x + y = x^2 - xy + y^2$ ise $x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0$ olup son denklemi x 'e bağlı ikinci dereceden bir denklem olarak düşünersek bu denklemin tam sayılarda çözümünün olabilmesi için deltasının tam kare olması gerekir. Bu durumda a bir tam sayı olmak üzere $(y+1)^2 - 4(y^2 - y) = a^2$ ise $a^2 + 3y^2 - 6y - 1 = 0$ ise $a^2 + 3(y-1)^2 = 4$ olup $a^2 = 4, (y-1)^2 = 0$ veya $a^2 = 1, (y-1)^2 = 1$ olup $y = 0, 1, 2$ olup $y = 0$ ise $x = 1, x = 0$, $y = 1$ ise $x = 0, x = 2$, $y = 2$ ise $x = 1, x = 2$ 6 tane çözüm ikilisi vardır.

Çözüm 2: Ana denklemi 2 ile çarpıp düzenlersek

$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ olur. Bu durumda $|x-y| \leq 1, |x-1| \leq 1, |y-1| \leq 1$ olmalıdır. Bu durumda çözüm ikilileri $(0,0), (1,0), (0,1), (2,1), (1,2), (2,2)$ olur.

6.4. Kaç tane a tamsayısı için, $x^2 + y^2 = axy$ denkleminin pozitif tam sayı çözümleri vardır?

Çözüm: Denklemi $x^2 - axy + y^2 = 0$ şeklinde x ' bağı 2. dereceden bir denklem olarak düzenlersek bu denklemin tam sayı çözümünün olabilmesi için deltasının tam kare olması gerekir. O halde $a^2y^2 - 4y^2 = n^2 \Rightarrow y^2(a^2 - 4) = n^2 \Rightarrow a^2 - 4$ tam kare olmalıdır. $a^2 - 4 = m^2 \Rightarrow (a - m)(a + m) = 4 \Rightarrow (a, m) = (2, 0), (-2, 0)$ olup 2 tane a değeri vardır.

6.6. $x^2 + y^2 = 2x + 2y + xy$ denkleminin tam sayılarda kaç tane çözüm ikilisi vardır?

Çözüm: Verilen denklemi $x^2 - (2 + y)x + y^2 - 2y = 0$ şeklinde x 'e bağı ikinci dereceden bir denklem olarak düzenlersek denklemin tam sayılarda çözümünün olabilmesi için deltasının tam kare olması gerekir. O halde $\Delta = 16 - 3(y - 2)^2 = n^2$ olmalıdır. $(y - 2)^2 \leq \frac{16}{3} \Rightarrow y = 0, 1, 2, 3, 4$ olur. $y = 0$ ise $x = 0, 2$ dir. $y = 1$ ve 3 için çözüm yoktur. $y = 2$ ise $x = 0, 4$ dür. $y = 4$ ise $x = 2, 4$ olup 6 tane çözüm ikilisi mevcuttur.

7. ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

1. $p, q, r, s \in R$ olmak üzere $\forall x \in R$ için $x^2 + px + q \geq 0$ ve $x^2 + rx + s \geq 0$ ise $\forall x \in R$ için $2x^2 + prx + 2qs \geq 0$ olduğunda gösteriniz.

2. $a, b, c \in R^+$ olmak üzere $a(1 - b) > \frac{1}{4}$, $b(1 - c) > \frac{1}{4}$, $c(1 - a) > \frac{1}{4}$ eşitsizliklerinin aynı anda sağlanmadığını gösteriniz.

3. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ olsun. $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ ise kenar uzunlukları a, b, c olan bir üçgenin var olduğunu gösteriniz.

4. $x < y < z < u$ ise $(x + y + z + u)^2 > 8(xz + yu)$ 'dur.

5. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-2 < \frac{x^2 + 2px - 2}{x^2 - 2x + 2} < 2$ olmasını sağlayan p reel sayılarını bulunuz.

6. $a > 0$ için $ax^2 + bx + c$ polinomu verilsin. $a + b + c \geq 0$, $a - b + c \geq 0$, $a - c \geq 0$ ve $b^2 - 4ac \geq 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerinin $[-1, 1]$ aralığında olduğunu gösteriniz.