OLİMPİYATLARA HAZIRLIK İÇİN

TÜMLEME PRENSİBİ & DE MORGAN KURALLARI

PROBLEMLERİ ve ÇÖZÜMLERİ (*L. Gökçe*)

Kombinatoriğin en önemli ve temel prensiplerinden birisi olan *Tümleme Prensibi* ile ilgili bir çalışma kağıdı hazırladık. Ayrıca iki kümenin kesişiminin ya da birleşiminin tümleyeni için *De Morgan Kuralları* olarak bilinen eşitlikleri kullanacağız. Bu yöntemlerden faydalanarak zor gibi görülen bir çok problemi kolayca çözebilir, bazı kombinatorik özdeşlik ispatlarını yapabiliriz. İyi çalışmalar dileriz …

İlk olarak birkaç tanımlama yaparak başlayalım:

Sonlu sayıda elemandan oluşan bir X kümesinin eleman sayısını $s(X)$ ile göstereceğiz.

E evrensel kümesi sonlu sayıda elemandan oluşsun ve $A \subset E$ olsun. $\{x : x \in E \text{ ve } x \notin A\}$ kümesine *A kümesinin tümleyeni* denir ve $\overline{A}$ sembolü ile gösterilir. Bu tanıma göre $s(E) = s(A) + s(\overline{A})$ olduğu açıktır. Şimdi ünlü tümleme prensibini ifade edebiliriz.

Tümleme Prensibi: $s(A) = s(E) - s(\overline{A})$

Problem 1: 6 doktor ve 4 hemşire arasından 7 kişilik bir sağlık ekibi kurulacaktır. Ekipte en az bir tane hemşire olacak biçimde kaç farklı sağlık ekibi oluşturulabilir?

Çözüm 1: İlk olarak alt durum analizi yapalım. Şu durumlar mümkündür:

4 hemşire, 3 doktor seçilirse $\binom{4}{4}\binom{6}{3}$ farklı ekip oluşturulabilir.

3 hemşire, 4 doktor seçilirse $\binom{4}{3}\binom{6}{4}$ farklı ekip oluşturulabilir.

2 hemşire, 5 doktor seçilirse $\binom{4}{2}\binom{6}{5}$ farklı ekip oluşturulabilir.

1 hemşire, 6 doktor seçilirse $\binom{4}{1}\binom{6}{6}$ farklı ekip oluşturulabilir.

Toplama prensibi ile $\binom{4}{4}\binom{6}{3}+\binom{4}{3}\binom{6}{4}+\binom{4}{2}\binom{6}{5}+\binom{4}{1}\binom{6}{6}$ farklı ekip oluşturulabilir.

Çözüm 2: Evrensel kümeyi ve aradığımız kümeyi sırasıyla

$E=\{$ 7 kişilik ekipler$\}$, $A=\{$İçinde en az 1 hemşire olan 7 kişilik ekipler$\}$

olarak tanımlarsak $\overline{A}=\{$İçinde hiç hemşire olmayan 7 kişilik ekipler$\}$ olur. Açıkça $s(\overline{A})=0$ olur. Toplam 10 kişi olduğu için $s(E)=\binom{10}{7}$ dir. O halde *Tümleme prensibi*nden

$s(A)=s(E)-s(\overline{A})=\binom{10}{7}-0$ olup $s(A)=\binom{10}{7}$ elde edilir.

SONUÇ: $\binom{4}{4}\binom{6}{3}+\binom{4}{3}\binom{6}{4}+\binom{4}{2}\binom{6}{5}+\binom{4}{1}\binom{6}{6}=\binom{10}{7}$ eşitliği vardır.

Şimdi bu sonucun genel halini ifade edebilecek bir problem yazalım:

Problem 2: m tane doktor ve n tane hemşirenin olduğu bir hastaneden $m+k$ kişilik bir sağlık ekibi kurulacaktır. ($m\geq n+k$ ve $n\geq k$) İçinde en az k tane hemşire bulunacak biçimde kaç farklı ekip oluşturulabilir?

Çözüm 1: *Toplama ilkesi* ile çözersek, $\binom{n}{k}\binom{m}{m}+\binom{n}{k+1}\binom{m}{m-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{m}{m-n+k}$ olur.

Çözüm 2: *Tümleme ilkesi* ile çözersek, rastgele seçilen $m+k$ kişiden en az k tanesinin hemşire olacağı garanti edilmiş olduğundan $s(\overline{A})=0$ olup $s(A)=s(E)=\binom{m+n}{m+k}$ bulunur.

Şimdi tümleme prensibi yardımıyla güçlü bir kombinatoryal özdeşliğe ulaşacağız.

SONUÇ: *m*, *n*, *k* pozitif tamsayılar olmak üzere $m \geq n+k$ ve $n \geq k$ ise

$$\binom{n}{k}\binom{m}{m}+\binom{n}{k+1}\binom{m}{m-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{m}{m-n+k}=\binom{m+n}{m+k}$$

özdeşliği vardır.

Problem 3: *a*, *b*, *c*, *d*, *e* harfleri kullanılarak 7 harfli kelimeler yazılacaktır. *a* veya *b* nin en az bir kez kullanıldığı kaç kelime yazılabilir?

Çözüm: Alt durum analizi ile bu problemi çözmek oldukça zordur. *a* nın bir defa kullanıldığı ve *b* nin hiç kullanılmadığı durumlar, *a* ve *b* nin birer defa kullanıldığı durumlar, *a* nın bir defa kullanıldığı ve *b* nin iki defa durumlar, … şeklinde uzayıp gidecektir.

Bunun yerine tümleme prensibini kullanalım. Tüm 7 harfli kelimelerin kümesi *E* evrensel kümesi olmak üzere $s(E)=5^7=78125$ dir. İstenen durumların kümesi *A* olsun. *a* ile *b* nin hiç kullanılmadığı durumların kümesi $\overline{A}$ olur. Elimizde sadece *c*, *d*, *e* harfleri kaldığı için bu 3 harfi kullanarak 7 harfli $s(\overline{A})=3^7=2187$ tane kelime yazabiliriz. *Tümleme prensibi*nden $s(A)=78125-2187=75938$ bulunur.

Problem 4: 5 basamaklı ve rakamlarının çarpımı 3 ün katı olan kaç doğal sayı vardır?

Cevap: $9\cdot 10^4-6^5=82224$. Çözümün detaylarını okuyucuya bırakıyoruz.

Teorem (De Morgan Kuralları): *A* ve *B* aynı evrensel kümeye ait iki altküme olsun. Bu durumda $\left(\overline{A\cap B}\right)=\overline{A}\cup\overline{B}$ ve $\left(\overline{A\cup B}\right)=\overline{A}\cap\overline{B}$ eşitlikleri geçerlidir.

Venn şeması çizilerek bu eşitliklerin doğruluğu kolayca görülebilir.

Aslında Problem 3 ün çözümünde *De Morgan Kuralı* nı uyguladık. Bu aşamayı bulmaya çalışmanız faydalı olacaktır.

Problem 5: *aabbbbc* kelimesindeki harflerinin yerleri değiştirilerek oluşturulan kelimelerden kaç tanesi *a* ile başlamaz ve *b* ile bitmez?

Çözüm: Evrensel kümeyi $E=\{7 \text{ harfli tüm permütasyonlar}\}$ şeklinde tanımlayalım. Ayrıca $A=\{a \text{ ile başlayanlar}\}$, $B=\{b \text{ ile başlayanlar}\}$ dersek aradığımız sonuç $s\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$ değeri olacaktır.

$s\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=s\left(\overline{A\cup B}\right)$ (*De Morgan Kuralı*)

$=s(E)-s\left(A\cup B\right)$ (*Tümleme Prensibi*)

$=s(E)-s\left(A\right)-s\left(B\right)+s\left(A\cap B\right)$ (*İçerme – Dışarma Prensibi*)

$s(E)=\dfrac{7!}{4!\cdot 2!}=105$, $s(A)=\dfrac{6!}{4!}=30$, $s(B)=\dfrac{6!}{3!\cdot 2!}=60$, $s\left(A\cap B\right)=\dfrac{5!}{2!}=60$ olduğundan

$s\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=105-30-60+60=75$ şeklinde bulunur.

Problem 6: *aabbbbc* kelimesindeki harflerinin yerleri değiştirilerek oluşturulan kelimelerden kaç tanesi *a* ile başlamaz veya *b* ile bitmez?

Çözüm: Bu sefer işimiz daha kolay. Problem 5 in çözümündeki gösterimleri kullanırsak $s\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$ değerini hesaplamalıyız.

$s\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=s\left(\overline{A\cap B}\right)$ (*De Morgan Kuralı*)

$=s\left(E\right)-s\left(A\cap B\right)$ (*Tümleme Prensibi*)

$=105-60=45$ olarak bulunur.

Problem 7: *aabbbbc* kelimesindeki harflerinin yerleri değiştirilerek oluşturulan kelimelerden kaç tanesinde *a* başta değildir veya *b* sonda değildir veya *c* ortada değildir?

Çözüm: Problem 5 in çözümündeki gösterimleri kullanalım. $C=\{c \text{ harfi ortada bulunanlar}\}$ olsun. Bu durumda $s\left(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}\right)$ değerini bulmalıyız. Birazdan $s\left(A\cap B\cap C\right)=\dfrac{4!}{2!}=12$ değerine ihtiyacımız olacak.

$s\left(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}\right)=s\left(\overline{A\cap B\cap C}\right)$ (*De Morgan Kuralı*)

$=s(E)-s(A\cap B\cap C)$ (*Tümleme Prensibi*)

$=105-12=93$ elde edilir.

Problem 8: *aabbbbc* kelimesindeki harflerinin yerleri değiştirilerek oluşturulan kelimelerden kaç tanesinde *a* başta değildir, *b* sonda değildir ve *c* ortada değildir?

Yol Gösterme: Evrensel küme $E=\{7 \text{ harfli tüm permütasyonlar}\}$, $A=\{a \text{ ile başlayanlar}\}$, $B=\{b \text{ ile başlayanlar}\}$, $C=\{c \text{ harfi ortada bulunanlar}\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $s\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)$ değeri hesaplanmalıdır.

$s\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)=s\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)$ (*De Morgan Kuralı*)

$=s(E)-s(A\cup B\cup C)$ (*Tümleme Prensibi*)

$=s(E)-s(A)-s(B)-s(C)+s(A\cap B)+s(B\cap C)+s(C\cap A)-s(A\cap B\cap C)$

eşitliklerini yazabiliriz. Son adımda *içerme – dışarma prensibi* kullanılmıştır.

Problem 9: $\{1,2,3,\ldots,20\}$ kümesinin elemanlarının çarpımı 4 ile tam bölünebilen

a) üç elemanlı kaç farklı altkümesi vardır?

b) keyfi sayıda elemanlı kaç farklı altkümesi vardır?

a için Çözüm 1: $A=\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$, $B=\{2,6,10,14,18\}$, $C=\{4,8,12,16,20\}$ şeklinde tanımlayalım. Ayrıca $D=B\cup C$ olsun. $a_1,a_2\in A$, $c_1\in C$, $d_1,d_2,d_3\in D$ olmak üzere elemanlarının çarpımı 4 ile tam bölünebilen kümeler $\{a_1,a_2,c_1\}$, $\{a_1,d_1,d_2\}$, $\{d_1,d_2,d_3\}$ şekillerinden birisi gibi olmalıdır.

$\{a_1,a_2,c_1\}$ şeklindeki kümelerin sayısı $\binom{10}{2}\binom{5}{1}=225$

$\{a_1, d_1, d_2\}$ şeklindeki kümelerin sayısı $\binom{10}{1}\binom{10}{2} = 450$

$\{d_1, d_2, d_3\}$ şeklindeki kümelerin sayısı $\binom{10}{3} = 120$

olur. *Toplama prensibi*nden $225 + 450 + 120 = 795$ bulunur.

a için Çözüm 2: Tüm üç elemanlı altkümeleri E evrensel kümesi olarak tanımlayalım. Bu halde $s(E) = \binom{20}{3}$ olur. Elemanlarının çarpımı 4 ün katı olan üç elemanlı alt kümelerin kümesine F dersek, elemanlarının çarpımı 4 ün katı olmayan üç elemanlı altkümelerin kümesi de $\overline{F}$ olur. $b_1 \in B$ olmak üzere $\{a_1, a_2, a_3\}$ veya $\{a_1, a_2, b_1\}$ formatındaki altkümelerin elemanları çarpımı 4 ile bölünemeyen bir sayı olduğundan *Tümleme prensibi*nden

$$s(F) = s(E) - s(\overline{F}) = \binom{20}{3} - \binom{10}{3} - 5 \cdot \binom{10}{2} = 1140 - 120 - 225 = 795 \text{ bulunur.}$$

b için Çözüm: $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ kümesinin tüm alt kümelerinin kümesini E evrensel kümesi olarak tanımlarsak $s(E) = 2^{20}$ olur. Elemanlarının çarpımı 4 ün katı olan keyfi elemanlı alt kümelerin kümesine F dersek, elemanlarının çarpımı 4 ün katı olmayan keyfi elemanlı altkümelerin kümesi de $\overline{F}$ olur. $\overline{F}$ kümesinin elemanları ya tamamıyla A kümesinden seçilmelidir ya da bir tane eleman B kümesinden, diğerleri A kümesinden seçilmelidir. O halde

1. Durum: $\overline{F}$ kümesinin elemanları ya tamamıyla A kümesinden seçilirse 2^{10} tane alt küme yazılabilir.

2. Durum: $\overline{F}$ kümesinin elemanlarından birisi B kümesinden seçilip, geriye kalan tüm elemanları da A kümesinden seçilirse $\binom{5}{1} 2^{10}$ tane altküme yazılabilir.

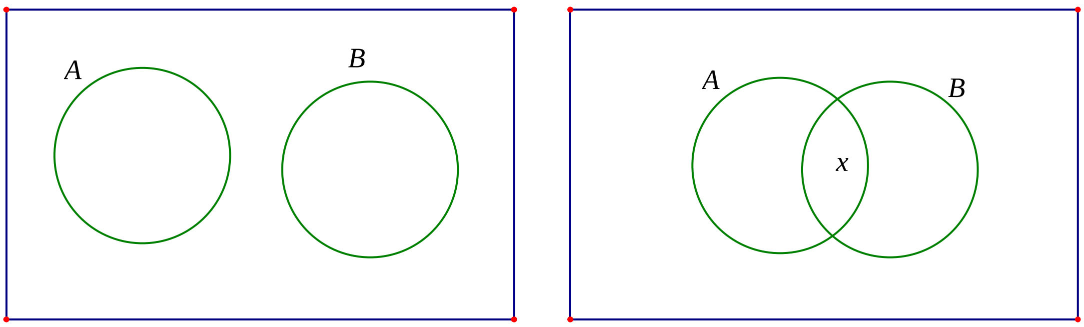
*Toplama Prensibi*nden $s(\overline{F}) = 2^{10} + 5 \cdot 2^{10} = 6 \cdot 2^{10}$ olur. Son olarak *Tümleme Prensibi*nden $s(F) = s(E) - s(\overline{F}) = 2^{20} - 6 \cdot 2^{10}$ olarak bulunur.

Problem 10 (*L. Gökçe*)**:** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinin iki altkümesi A, B olsun.

a) $s(A \cap B) \geq 1$ olacak şekilde kaç farklı (A, B) sıralı ikilisi vardır?

b) $s(A\cap B)\geq 2$ olacak şekilde kaç farklı (A,B) sıralı ikilisi vardır?

a için Çözüm: Tüm (A,B) sıralı ikililerinin kümesini E evrensel kümesi olarak tanımlayalım. A yerine 2^9 tane ve B yerine de 2^9 tane küme seçebileceğimiz için *Çarpma Prensibi*ne göre $s(E)=2^9\cdot 2^9=2^{18}$ olur. Şimdi istenen durumların kümesini $C=\{(A,B):\ s(A\cap B)\geq 1\}$ şeklinde ifade edersek $\overline{C}=\{(A,B):\ s(A\cap B)=0\}$ olur. Yani $A\cap B=\varnothing$ olacak şekilde kaç farklı (A,B) sıralı ikilisi bulabileceğimizi hesaplamalıyız. Aşağıdaki şemayı inceleyelim. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinden seçtiğimiz 1 elemanını yerleştirebileceğimiz 3 bölge vardır. Benzer şekilde, 2 yi yerleştirebileceğimiz üç bölge vardır. Bu şekilde devam edilirse *Çarpma Prensibi*nden $s(\overline{C})=3^9$ bulunur. *Tümleme Prensibi*nden $s(C)=s(E)-s(\overline{C})=2^{18}-3^9$ olur.



b için Çözüm: Tüm (A,B) sıralı ikililerinin kümesini E evrensel kümesi olarak tanımlayalım. $s(E)=2^{18}$ olur. İstenen durumların kümesini $C=\{(A,B):\ s(A\cap B)\geq 2\}$ biçiminde tanımlarsak $\overline{C}=\{(A,B):\ s(A\cap B)=0 \text{ veya } s(A\cap B)=1\}$ olur. Problemin **a** kısmından dolayı $\{(A,B):\ s(A\cap B)=0\}$ kümesinin eleman sayısının 3^9 olduğunu biliyoruz. Şimdi de $\{(A,B):\ s(A\cap B)=1\}$ kümesinin eleman sayısını bulalım. Üstteki şemada x yerine gelebilecek $\binom{9}{1}=9$ farklı seçim yapılabilir. Geriye kalan 8 elemanı $A\cap B$ dışındaki üç bölgeye dağıtmalıyız. Bu ise 3^8 yolla yapılabilir. *Çarpma Prensibi*ne göre $\{(A,B):\ s(A\cap B)=1\}$ kümesinin eleman sayısı $9\cdot 3^8$ olur. *Toplama Prensibi*nden $s(\overline{C})=3^9+9\cdot 3^8=12\cdot 3^8$ bulunur. Son olarak *Tümleme Prensibi* uygulanırsa $s(C)=s(E)-s(\overline{C})=2^{18}-12\cdot 3^9$ elde edilir.

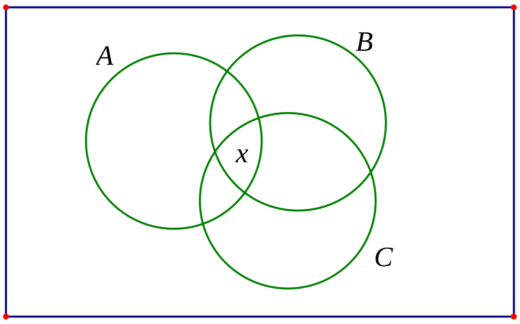
Problem 11 (*L. Gökçe*)**:** $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinin üç altkümesi *A*, *B*, *C* olsun.

a) $s(A \cap B \cap C) \geq 1$ olacak şekilde kaç farklı (A,B,C) sıralı üçlüsü vardır?

b) $s(A \cap B \cap C) \geq 2$ olacak şekilde kaç farklı (A,B,C) sıralı üçlüsü vardır?

a için Çözüm: Tüm (A,B,C) sıralı üçlülerinin kümesini *E* evrensel kümesi olarak tanımlayalım. *A* yerine 2^9 tane, *B* yerine 2^9, *C* yerine 2^9 tane küme seçebileceğimiz için *Çarpma Prensibi*ne göre $s(E) = 2^9 \cdot 2^9 \cdot 2^9 = 2^{27}$ olarak hesaplanır. İstenen durumların kümesini $D = \{(A,B,C) : s(A \cap B \cap C) \geq 1\}$ şeklinde tanımlarsak $\overline{D} = \{(A,B,C) : s(A \cap B \cap C) = 0\}$ olur. Aşağıdaki şekilde $A \cap B \cap C$ kümesini ifade eden bölge *x* ile gösterilmiştir. Bu bölgeye hiçbir eleman gelmeyeceği için $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinin her bir elemanını şemadaki 7 bölgeye 7^9 yolla dağıtabiliriz. $s(\overline{D}) = 7^9$ olur. *Tümleme Prensibi*nden

$s(D) = s(E) - s(\overline{D}) = 2^{27} - 7^9$ olarak bulunur.



b için Çözüm: İstenen durumların kümesini $D = \{(A,B,C) : s(A \cap B \cap C) \geq 2\}$ şeklinde tanımlarsak $\overline{D} = \{(A,B,C) : s(A \cap B \cap C) = 0 \text{ veya } s(A \cap B \cap C) = 1\}$ olur. $s(A \cap B \cap C) = 0$ eşitliğini sağlayan (A,B,C) üçlülerinin sayısının 7^9 olduğunu problemin **a** kısmında bulmuştuk. Şimdi de $s(A \cap B \cap C) = 1$ eşitliğini sağlayan (A,B,C) üçlülerinin sayısını belirleyelim. Bunun için üstteki şemada *x* yerine $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinin elemanlarından bir tanesini seçelim. $\binom{9}{1} = 9$ farklı seçim yapılabilir. Geriye kalan 8 elemanı 7 bölgeye 7^8 yolla dağıtabiliriz. *Çarpma Prensibi*ne göre $9 \cdot 7^8$ tane sıralı üçlü yazabiliriz. *Toplama Prensibi*nden $s(\overline{D}) = 7^9 + 9 \cdot 7^8 = 16 \cdot 7^8$ olur. . *Tümleme Prensibi*nden $s(D) = s(E) - s(\overline{D}) = 2^{27} - 16 \cdot 7^8$ elde edilir.

Problem 12: k ve n birer pozitif tamsayı olmak üzere $\{1,2,3,\ldots,n\}$ kümesinin $A_1, A_2, \ldots, A_k$ alt kümelerini göz önüne alalım. $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \{1,2,3,\ldots,n\}$ olacak şekilde kaç tane $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ sıralı k – lısı yazılabilir?

Çözüm: 1 elemanını alalım. Bu elemanın A_1 de olup olmaması yönüyle 2 durum vardır. Benzer şekilde 1 in A_2 de olup olmaması yönüyle 2 durum vardır. Bu şekilde devam edilirse 1 in $A_1, A_2, \ldots, A_k$ kümelerinde olup olmaması yönüyle 2^k durum vardır. 1 bu kümelerden bir kısmında bulunup, bir kısmında görülmeyebilir. Fakat 1 bu kümelerden hiçbirinde bulunmazsa bu istenmeyen bir durumdur. *Tümleme prensibi* gereği 1 in $A_1, A_2, \ldots, A_k$ kümelerine dağılımı $2^k - 1$ yolla gerçekleşir. Aynı işlemler 2, 3, … , n için de yapılırsa *Çarpma Prensibi* ile $(2^k - 1)^n$ tane $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ sıralı k – lısı yazılabilir.

Problem 13: Kenar uzunluğu 1 cm olan bir kare içine, alanları toplamı 1997,5 cm^2 olan ve konveks olmaları gerekmeyen 1998 tane çokgen, karenin dışına taşmayacak biçimde rastgele yerleştiriliyor. Karenin en az bir noktasının söz konusu çokgenlerin hepsi tarafından örtüldüğünü gösteriniz. (*Akdeniz M.O* 2. Aşama – 1998)

Çözüm: Karesel bölgeye E, çokgensel bölgelere A_i, tümleyenlerine $\overline{A_i}$, alanlarına $A(A_i)$ diyelim. $\bigcap_{i=1}^{1998} A_i \neq \varnothing$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için $A\left(\bigcap_{i=1}^{1998} A_i\right) > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$A\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{1998} A_i}\right) = A\left(\bigcup_{i=1}^{1998} \overline{A_i}\right) \quad (\textit{De Morgan Kuralı})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{1998} A\left(\overline{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{1998} \left(1 - A(A_i)\right) \quad (\textit{Tümleme Prensibi})$$

$$= 1998 - \sum_{i=1}^{1998} A(A_i)$$

$$= 1998 - 1997{,}5 = 0{,}5$$

olup $A\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{1998} A_i}\right) \le \frac{1}{2}$ elde edilir. Tekrar *Tümleme Prensibi* uygulanırsa

$A\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{1998} A_i}\right) + A\left(\bigcap_{i=1}^{1998} A_i\right) = 1$ olup $A\left(\bigcap_{i=1}^{1998} A_i\right) \ge \frac{1}{2}$ elde edilir.

Alıştırma Soruları:

1) 6 erkek, 5 kız arasından 3 kişilik bir grup kurulacaktır. Grupta en az 1 erkek olması koşuluyla kaç farklı grup oluşturulabilir? (C: 155)

2) 4 basamaklı ve rakamlarının çarpımı çift sayı olan kaç doğal sayı vardır? (C: 8375)

3) 122333 ün tüm 6 lı permütasyonlarından kaç tanesi

a) 1 ile başlamaz veya 3 ile bitmez?

b) 1 ile başlamaz ve 3 ile bitmez?

c) 1 ile başlamaz veya 3 ile bitmez veya baştan ikinci sıraya 2 gelmez?

d) 1 ile başlamaz, 3 ile bitmez ve baştan ikinci sıraya 2 gelmez?

4) $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ kümesinin elemanlarının çarpımı

a) 9 ile tam bölünebilen kaç farklı altkümesi vardır?

b) 8 ile tam bölünebilen kaç farklı altkümesi vardır?

5) (*L. Gökçe*) $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kümesinin iki altkümesi *A*, *B* olsun.

a) $s(A \cap B) \ge 1$ olacak şekilde kaç farklı (A, B) sıralı ikilisi vardır? (C: $4^n - 3^n$)

b) $s(A \cap B) \ge 2$ olacak şekilde kaç farklı (A, B) sıralı ikilisi vardır? (C: $4^n - (n+1) \cdot 3^n$)

c) $0 \le k \le n$ olmak üzere $s(A \cap B) > k$ olacak şekilde kaç farklı (A, B) sıralı ikilisi vardır?

(C: $\binom{n}{k+1} \cdot 3^{n-k-1} + \binom{n}{k+2} \cdot 3^{n-k-2} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot 3^0$)

6) (*L. Gökçe*) $\{1,2,3,\ldots,n\}$ kümesinin üç altkümesi *A*, *B*, *C* olsun.

a) $s(A \cap B \cap C) \geq 1$ olacak şekilde kaç farklı (A,B,C) sıralı üçlüsü vardır?

b) $s(A \cap B \cap C) \geq 2$ olacak şekilde kaç farklı (A,B,C) sıralı üçlüsü vardır?

c) $0 \leq k \leq n$ olmak üzere $s(A \cap B \cap C) > k$ olacak şekilde kaç farklı (A,B,C) sıralı üçlüsü vardır?

Kaynakça:

[1] Gökçe, L. Sonlu Matematik Ders Notları

[2] Şahin, M., 10. Sınıf Matematik Soru Kitabı

[3] Van Lint, J. H., Wilson, R. M., A Course In Combinatorics

[4] İ. Aliyev, M. Özdemir, D. Şıhaveya, Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatları