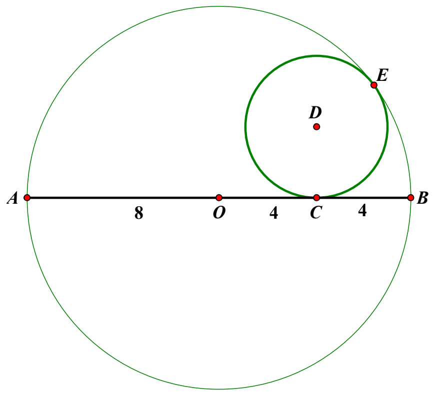
Zor Soru Nasıl Hazırlanır?

Bu süreci gayet uzun bir örnekle göstermeye çalışacağım.

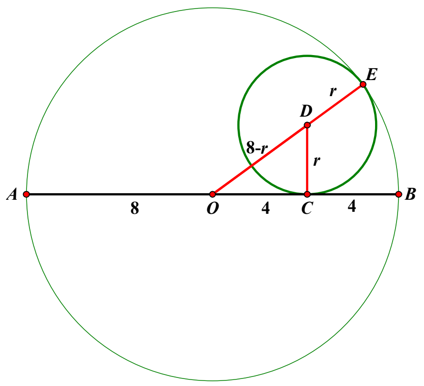
Soru 1:

Birbirine içten teğet D ve O merkezli iki çemberden küçük olanı diğerinin çapına da teğettir. $OC = CB = 4$ ise küçük çemberin yarıçapı kaçtır?



Çözüm:

Görüldüğü gibi çok klasik bir teğet çemberler sorusu ile karşı karşıyayız.



O, D, E doğrusal olacağı için, $DC = DE = r$ dersek $OD = 8 - r$ ve ODC üçgeni dik üçgen olacaktır. Pisagordan $DC^2 + OC^2 = OD^2 \Rightarrow r^2 + 4^2 = (8 - r)^2 \Rightarrow 16 = 64 - 16r \Rightarrow r = 3$ rahatlıkla elde edilir.

Yorum:

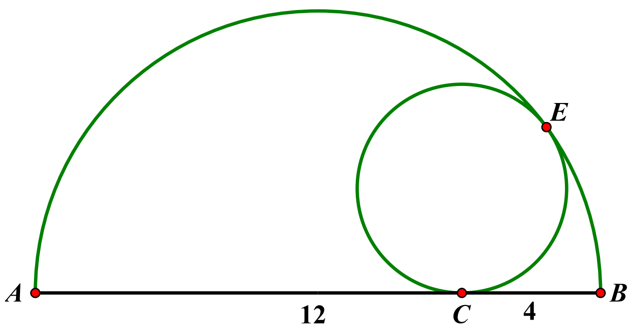
Bu soru birçok öğrenci için zor bir sorudur. Matematikten hatırı sayılır bir net çıkartan çoğu öğrenci için ise klasik bir sorudur.

Peki bu soru nasıl türetildi? ODC üçgenini $3 - 4 - 5$ üçgeni olarak kurgulayınca, $OE = 5 + 3 = 8$ ve $CB = 4$ çıkıyor. $OC = CB = 4$ bağıntısını verdiğimizde diğerleri bulunabiliyor. Birçok LYS geometri sorusu bu mantıkla hazırlanıyor.

Bu soruyu şu şekilde de sorabilirdik.

Soru 2:

Birbirine içten teğet iki çemberden küçük olanı diğerinin çapına da teğettir. $AC = 12$, $BC = 4$ ise küçük çemberin yarıçapı kaçtır?



Yorum: Bu soru bir öncekine göre bir nebze daha zor. Neden? Çünkü, öğrenci bir önceki soruda "O, D, E doğrusaldır." diyordu. O ile D görünürdü. Şimdi, çemberlerin merkezlerini kendisi yerleştirmek zorunda.

Yeterince zor bir soru mu? Ortalamanın üstünde bir öğrenci için değil. O zaman klasik LYS mantığından biraz sıyrılalım. Öğrencilerin çözerken zorlandığı soru tipine, yani değer vermeden sorulan sorulara geçelim.

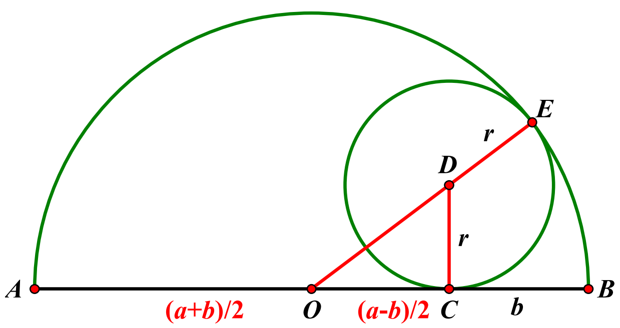
Soru 3:

Birbirine içten teğet iki çemberden küçük olanı diğerinin çapına da teğettir. $AC = a$, $BC = b$ ise küçük çemberin yarıçapı a ile b cinsinden nedir?

Çözüm:

AO ve OC doğru parçalarının uzunluklarını yazalım:

$AB = a + b \Rightarrow AO = OB = OE = \frac{a+b}{2}$ ve $OC = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$



O, D, E doğrusal olduğundan $OD = OE - DE = \frac{a+b}{2} - r = \frac{a+b-2r}{2}$ elde edilir.

ODC üçgeninde Pisagordan $DC^2 + OC^2 = OD^2 \Rightarrow \left(\frac{a+b-2r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ elde edilir. Harfi ifadelere dalınca, $a^2 + b^2 + 4r^2 + 2ab - 4ar - 4br = 4r^2 + a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow 4ab = 4ar + 4br$ elde edilecek. Bu da bize $r(a+b) = ab$ eşitliğini verir. $a = 12, b = 4$ için $r = 3$ elde edilir.

Şimdi bulduğumuz bu özdeşlikle biraz oynayalım. $r = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}$ elde ettik.

Bu noktadan itibaren Matematik Olimpiyatları seviyesine geçiyoruz. Sorumuz klasik bir soru olacaksa:

Soru 4:

Birbirine içten teğet iki çemberden küçük olanı diğerinin $[AB]$ çapına C de teğettir. Küçük çemberin yarıçapı r ise, $\frac{1}{r} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$ olduğunu gösteriniz.

Yorum 1:

Bu soru bir önceki sorudan farklı değil. Hatta daha kolay, cevabı bize söylüyor. $AC = a$ ve $BC = b$ dediğimizde yukarıdaki soruyu elde edeceğiz.

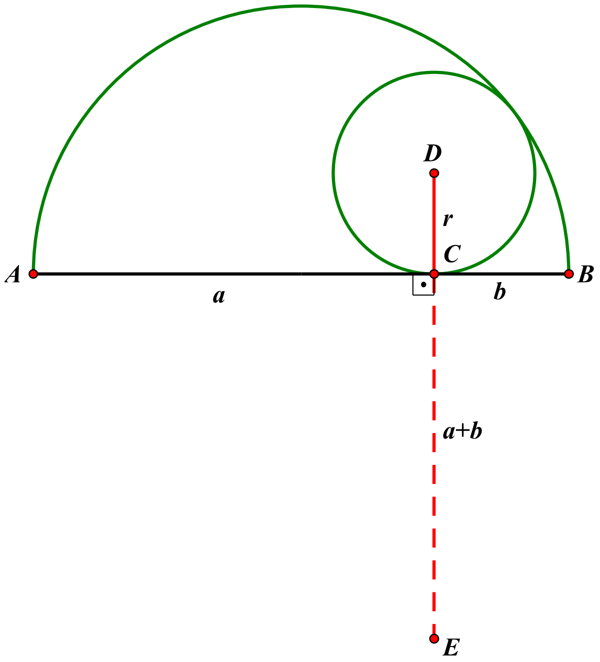
Yeri gelmişken belirteyim. Bizim eğitim sistemimizde değer verme çok yaygın. Mesela $AC = 3 \cdot BC$ gibi ifadeyle karşılaştığımızda, biz hemen "$BC = k$ ise $AC = 3k$ dır." diyoruz. Halbuki, bu yöntem yukarıdaki sorunun çözümünde büyük kolaylık sağlamaktadır. Yine de, açıkça belirteyim, olimpiyat seviyesinde diğer yol daha şık duruyor.

Yorum 2:

Şu aşamada, basit bir çember sorusundan bir olimpiyat sorusu elde ettik. Olimpiyat seviyesinde düşünürsek, bu soru o kadar da zor bir olimpiyat sorusu değil. Diyorum; ama bu soru aslında 1993 yılında 1. Ulusal Matematik Olimpiyatında soruldu. Neden basit bir olimpiyat sorusu, çünkü çember merkezleri ile değme noktasının doğrusallığı haricinde bir analitik düşünce barındırmıyor. Bu da apaçık ortada. Belki de böyle bir yorum yapmamda, ÖSS hazırlık sürecinde bu tarzda birçok soru görmemiz etkili. Yine de, bizim eğitim sistemimize göre bu soru İlköğretim Matematik Olimpiyatı ayarında.

Soruyu lise olimpiyat seviyesine taşıyalım.

$r(a+b)=ab$ elde etmiştik. ab ne? C noktasının kuvveti. $r(a+b)$ ne? Bir şey değil. En azından C noktasının büyük çembere göre kuvveti değil. Ama DC yi $(a+b)$ kadar uzatırsak, bakın ne elde ediyoruz.



$DC \cdot CE = AC \cdot CB$ yani C noktasının bir çembere göre kuvvetlerinin eşitliğini elde ediyoruz. Buradan elde ettiğimiz sonu.ta D, B, A, E nin çembersel olduğu, ya da $ADBE$ dörtgeninin bir kirişler dörtgeni olduğudur.

Soru 5:

Birbirine içten teğet iki çemberden küçük olanı diğerinin $[AB]$ çapına C de teğettir. D küçük çemberin merkezi olmak üzere; $[DC$ üzerinde $AB = CE$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. A, D, B, E noktalarının çembersel olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1:

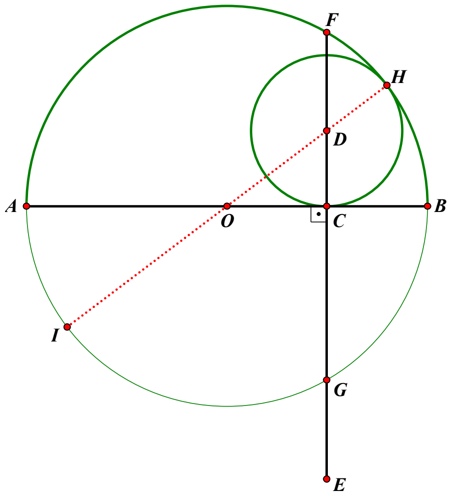
$AC = a, BC = b, DC = r$ deriz. Çemberselliğin olması için $r(a+b) = ab$ olması gerekir. Bu durumda $r = \frac{ab}{a+b}$ elde edilir. Demek ki r yi a ve b cinsinden bulmamız isteniyor. Daha önceki sorulardaki gibi çözümlerle $ra + rb = ab \Rightarrow r(a+b) = ab$ elde edilir. Bu durumda $DC \cdot CE = AC \cdot CB$ olacağı için A, D, B, E çembersel olur.

Yorum:

Bu çözüm, bizim kurguladığımız çözüm. (Tam bir "soru böyle hazırlanır" örneği)

Şimdi de, yönlendirme olmadan, farklı şekilde soruyu çözelim. Aslında bunu, soruyu hazırlayan kişi kolay kolay yapamaz. Bu noktada, başka kişilerden yardım alınması daha mantıklıdır.

Çözüm 2:



DE, AB çaplı O merkezli çemberi $G \in [CE]$ olacak şekilde F ve G de kessin. H, çemberlerin birbirlerine teğet oldukları nokta ve DH, O merkezli çemberi I da kessin. O, D, H açık bir şekilde doğrusal.

$DH \cdot DI = DH(IH - DH) = DC(AB - DC) = FD \cdot DG = (CF - DC)(CG + DC)$

$= (CF - DC)(CF + DC) \Rightarrow DC(AB - DC) = CF^2 - DC^2 \Rightarrow DC \cdot AB = CF^2$ elde edilir. C noktasının çembere göre kuvvetinden $AC \cdot CB = CF \cdot CG = CF^2$ olduğu için $DC \cdot AB = DC \cdot CE = AC \cdot CB$ olacağından A, D, B, E çemberseldir.

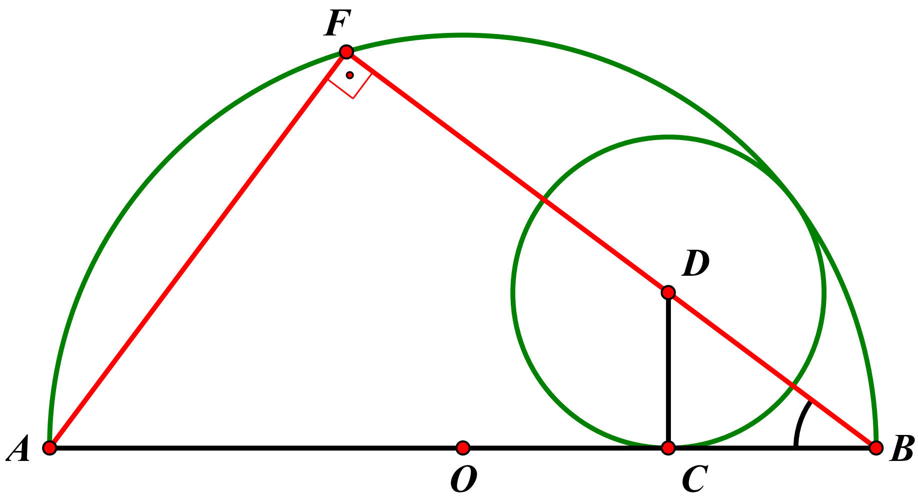
Yorum:

Olimpiyat mantığında sorular genelde bu şekilde çözülüyor. Aslında, bu şekilde çözülüyordan ziyade, bu şekilde çözüm yazılıyor desek daha doğru olur.

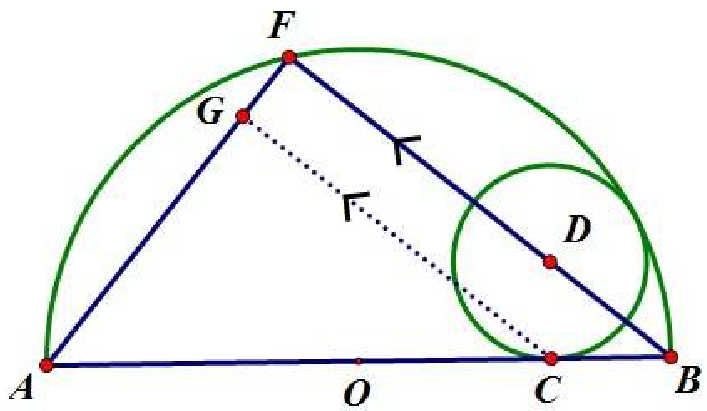
Basit bir çemberlerin teğetliği sorusundan nerelere geldik, gördünüz mü? Farkındayım, sıkıldınız. Ama bu soru üzerine yenecek çok ekmek var.

Hatırlayalım, Soru 4'ü nasıl türetmiştik: $r = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}$.

Benze şekilde $\frac{r}{b} = \frac{a}{a+b}$ elde edilebilir. $\frac{r}{b}$ nedir? $\frac{r}{b} = \tan \angle DBC = \frac{DC}{CB}$ dir. $\frac{a}{a+b}$ nedir ? $\frac{a}{a+b} = \frac{AC}{AB}$ dir. Peki $\frac{AC}{AB}$ nedir? Bir şey değil; ama paralelliği hatırlatır. $tan\angle DBC$ dedik ya, $tan\angle DBC$ nin büyük çemberde de bir karşılığı vardır. Bu görmek için, BD ile çemberi ikinci kez kesiştirelim.



$\tan \angle DBC = \frac{DC}{CB} = \frac{AF}{FB}$. Bu durumda $\frac{r}{b} = \frac{DC}{CB} = \frac{AF}{FB} = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a+b}$ elde edilir. $\frac{AC}{AB}$ dedik ya paralelliği hatırlatır. C den BF ye paralel çizilen paralel AF yi G de kessin. $\frac{AC}{AB} = \frac{CG}{BF}$ olur. Daha önceki eşitlikle birleştirdiğimiz de $\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{AB} = \frac{CG}{BF} \Rightarrow AF = CG$ elde edilir. Yani aşağıdaki şekilde $CG = AF$.



Kısaca, 6. sorumuz ne oldu?

Soru 6:

O merkezli AB çaplı yarım çembere teğet olan D merkezli çember, AB çapına da C noktasında teğettir. BD, O merkezli çemberi F de, C den geçen BF ye paralel olan doğru da AF yi G de kessin. $AF = CG$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

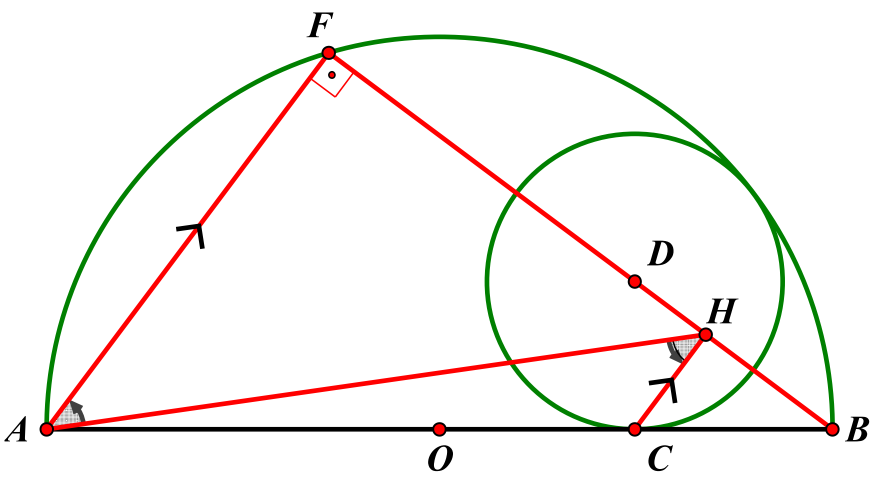
$\frac{AC}{AB} = \frac{CG}{BF} = \frac{AF}{BF} = \frac{DC}{CB}$ olduğunu göstermemiz isteniyor. Önceki sorulardaki gibi

$AC \cdot BC = DC \cdot (AC + BC) = DC \cdot AB \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{CB}$ olduğunu buluruz. Sonra $\frac{AC}{CB} = \frac{CG}{BF}$ ve $\frac{DC}{CB} = \frac{AF}{BF}$ eşitliklerini birleştirerek, $AF = CG$ elde ederiz.

Yorum:

Bence bu soru, önceki soruların hepsinden daha güzel.

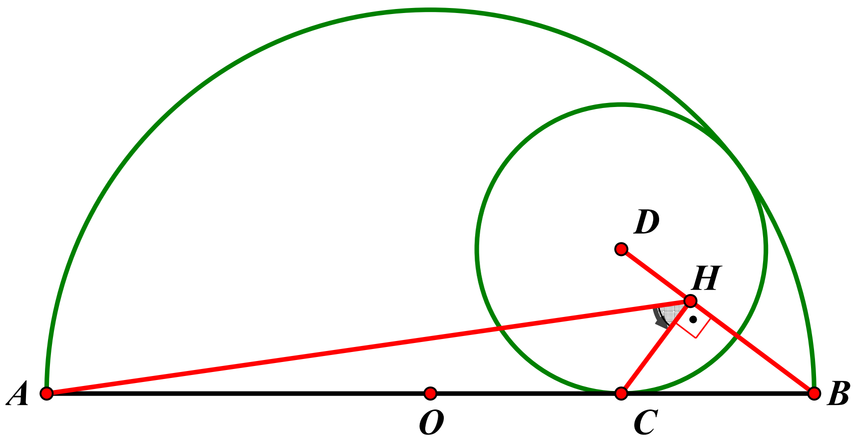
$CG = AF$ güzel bir eşitlik. Hazır bulmuşken, biraz daha irdeleyelim. $AF \perp BF$ ya? $[BF$ üzerinde $AF = HF$ olacak şekilde bir H noktası alırsam. AFH üçgeni ikizkenar dik üçgen olur. Bu tip şeyler güzel. Tamamen rastgele noktalar alıyorsunuz, bir ikizkenar üçgen elde ediyorsunuz. İkizkenar üçgen olduğunu ispatlayın, tarzında bir soru mu soralım. Şık bir soru olmaz. Biraz daha inceleyelim. $HF = CG$, $CG \parallel BF$ ve $BF \perp AF$ olduğu için, $CHFG$ bir dikdörtgen olur. O zaman H ne imiş, C den BF ye inilen dikmenin ayağı imiş. O zaman, C den BF ye inilen dikmenin ayağı H ise $AF = FH$ olduğunu gösteriniz. Değil mi, yeni sorumuz? Olabilir; ama biraz daha işi sıkı tutalım.



$CH \parallel AF$ olduğu için $\angle FAH = \angle AHC = 45°$ olur. Bence sade bir soru oldu. Hem bu şekilde F noktasını da tanımlamak gerekmez.

Soru 7:

O merkezli AB çaplı yarım çembere teğet olan D merkezli çember, AB çapına da C noktasında teğettir. C den BD ye inilen dikmenin ayağı H ise, $\angle AHC$ açısı bulunuz.



Bu soru üzerine, değişkenleri değiştirerek, daha önce bahsettiğimiz gibi ikizkenarlığı sormak gibi, birçok soru üretilebilir. Ama her adımda amacımız; şık duran, belirli bir analitik düşünceyle birinden diğerine geçilen sorular elde etmek. Mesela, AHC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi, P yi ele alalım. $\angle APC = 2 \cdot \angle AHC = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ olacağı için P, AC yi 90° ile görür. Yani P, AC çaplı çember üzerindedir. "AHC üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin AC çaplı çember üzerinde yer aldığını gösteriniz." diye bir soru da elde etmiş olduk. Bunu soru olarak yazmayacağım. H ile P noktaları AC yi sabit açılarla görüyorlar. Sabit açı dediğimizde, geometrik yer aklımıza gelir. Ama AC sabit değil, yani cevap AC den geçen bir yay değil en azından. Bu konuda dinamik çizim araçlarına da giriş yapmış olalım.

H noktasının ya da AHC üçgeninin çevrel merkezi P nin geometrik yerini bulmaya çalışalım.

Ben The Geoemeter's Sketchpad yazılımını kullanıyorum. Cabri ya da Geogebra gibi başka yazılımlar da var. Üstelik Geogebra ücretsiz. Size bu programların nasıl kullanıldığını anlatmayacağım. Bu tip programlarla, neler yapabileceğinizden bahsedeceğim.

Bu programlarla, pergel ve cetvel ile çizim yapar gibi çizimler yapabiliriz. Uzunluk, açı ölçebiliriz. Doğrusallık, çembersellik testleri yapabiliriz. Bir noktayı belirli bir eğri üstünde hareket ettirerek, diğer noktaların davranışları hakkında fikir sahibi olabiliriz. Son söylediğimiz şey aynı zamanda şu anlama geliyor: Geometrik yer bulabiliriz.

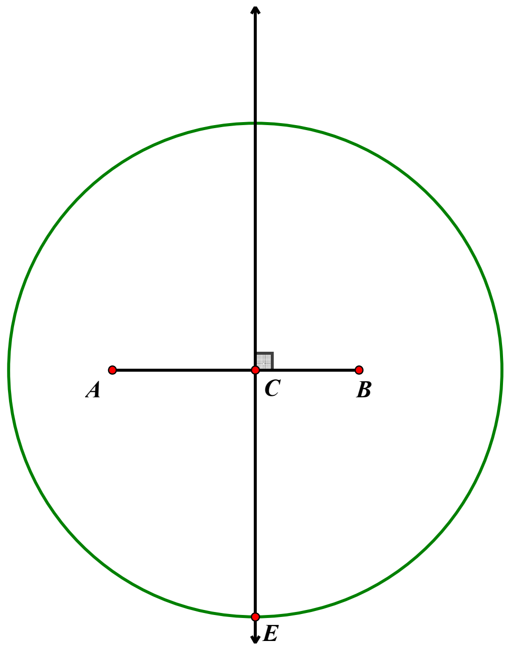
Bu programlara, H ya da P nin geometrik yeri hakkında fikir sahibi olmak için başvuruyoruz. Öncelikle bir $[AB]$ çaplı çember ve $[AB]$ ye $[AB]$ üzerindeki C noktasında dokunan, $[AB]$ çaplı çembere de teğet olan küçük çemberi çizmemiz gerekiyor. Bunun kendisi bile başlı başına bir soru.

Soru 8:

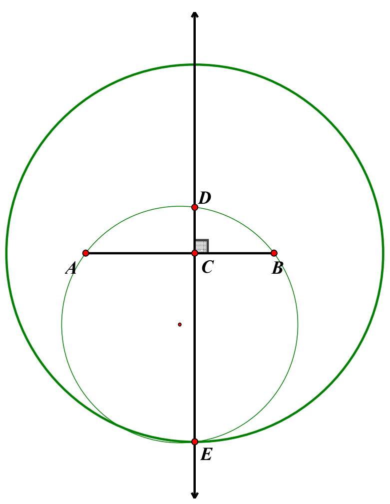
Bir doğru üzerinde sırasıyla A, C, B noktaları alınıyor. AB ye C de ve $[AB]$ çaplı çembere teğet olan çemberi çiziniz.

Çözüm:

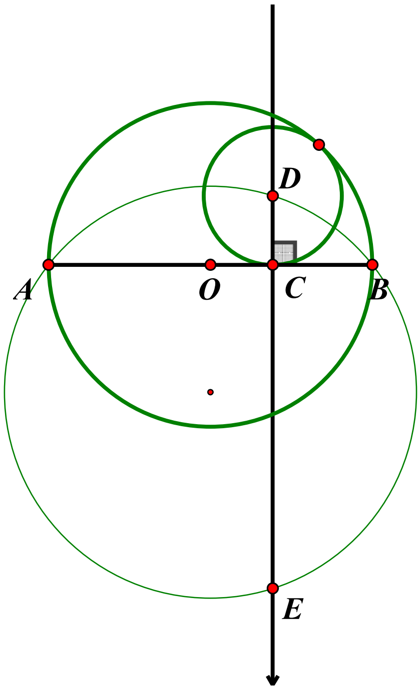
Pergelimizin bir ucunu A ya, diğer ucunu B ye yerleştiririz. Pergelimizi $|AB|$ kadar açmış olduk.



Sonra pergelimiz ile C merkezli $|AB|$ yarıçaplı çember çizeriz. Bu çember ile C den geçen ve AB ye dik olan doğrunun kesişimini E olarak işaretleriz. Dikkat ettiyseniz, Soru 5'te elde ettiğimiz çıkarımları uyguluyoruz. ABE üçgeninin çevrel çemberini çiziyoruz. Bunu nasıl yapıyoruz? AB nin orta dikmesi ile AE nin orta dikmesini kesiştiriyoruz. Oluşan nokta ABE üçgeninin çevrel merkezi oluyor. Bu nokta merkezli A dan geçen çemberi çiziyoruz. Bu çember ile CE doğrusu, D de kesişsin. D noktası, çizilmesi istenen



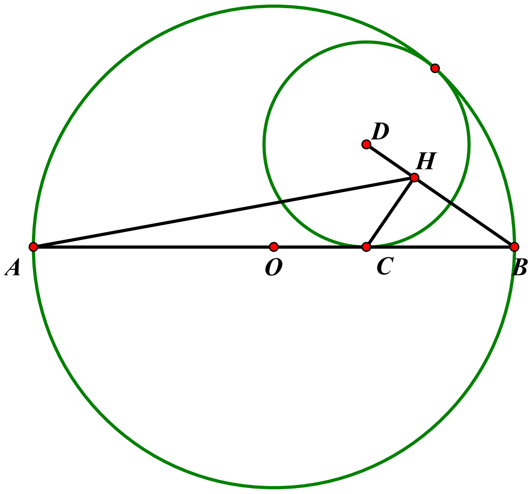
çemberin merkezidir. D merkezli C den geçen çember, aynı zamanda AB çaplı çembere teğettir.



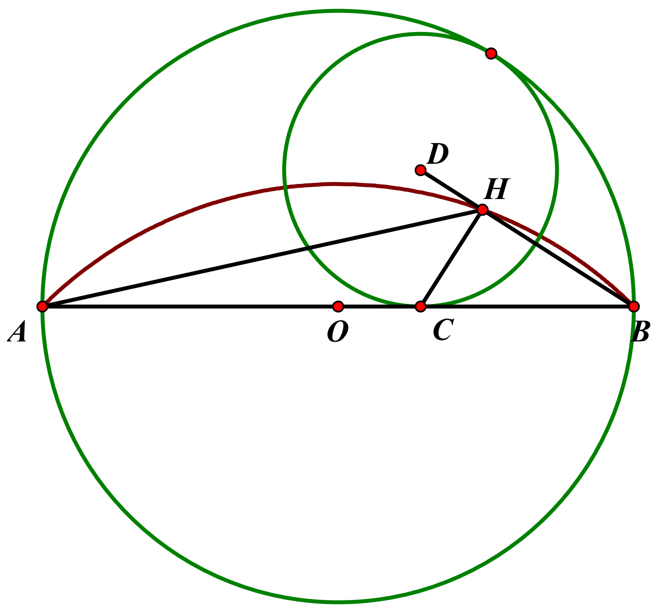
Bu sonuca nasıl vardık. Soru 5'in ispatından. Yani bu soruyu çözmeden önce, istenen çemberin yarıçapının $\frac{AC \cdot CB}{AB}$ olduğunu göstermemiz gerekiyor.

Yorum: Bazen soruyu çizmek, çözmekten daha zor.

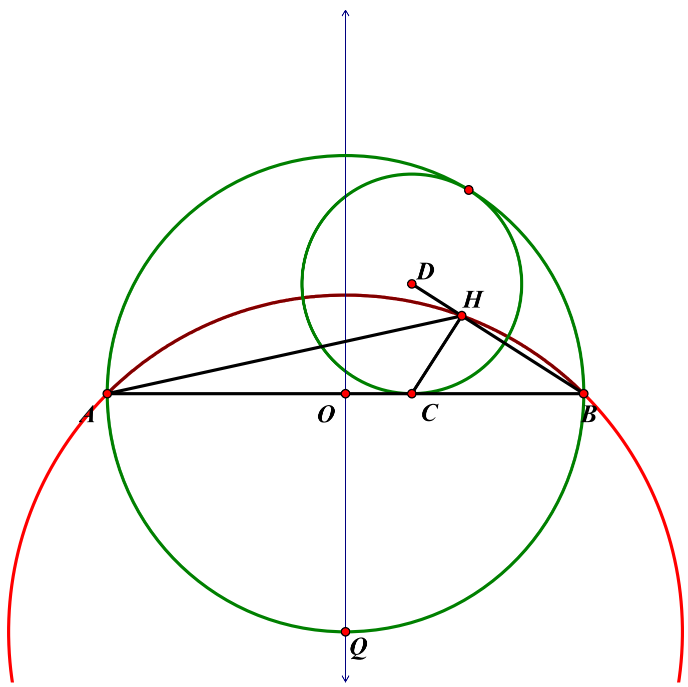
Şimdi de C den BD ye dik inelim.



Programımızı kullanarak C yi $A - B$ arasında gezdirebiliriz. Neyse ki, program da bunu otomatik olarak yapan bir araç mevcut. C ile H noktalarını seçiyorum. Sonra Locus (Geometrik Yer) özelliğini çalıştırıyorum. H, C ye bağımlı olduğu için program C yi ait olduğu küme içerisinde (Burada $[AB]$ oluyor) hareket ettiriyor. Sonuçta aşağıdaki gibi bir şekil elde ediyoruz.



H nin geoemetrik yeri AB geçen bir yay gibi duruyor. Şekle aldanmamak lazım. Başka türlü, mesela elips gibi, bir eğri de olabilir. Ama değil. Nereden biliyoruz. Çünkü $\angle AHB = 135°$ ve A, B noktaları sabit. Bu durumda H nin geometrik yeri bir çember yayıdır. AHB üçgeninin çevrel merkezi Q olsun. $\angle AQB + 2 \cdot \angle AHB = 360° \Rightarrow \angle AQB = 360° - 2 \cdot 135° = 90°$ olacaktır. Yani Q noktası, AB çaplı çember üzerinde ve $AQ = QB$ özelliğini sağlıyor. Yani Q, AB ye O da dik olan doğrunun üzerinde.



Gerçekten de, H noktasının geometrik yeri AB çaplı çemberin AB yayının orta noktasını merkez kabul eden ve A, B noktalarından geçen çemberin AB küçük yayıdır.

Yorum:

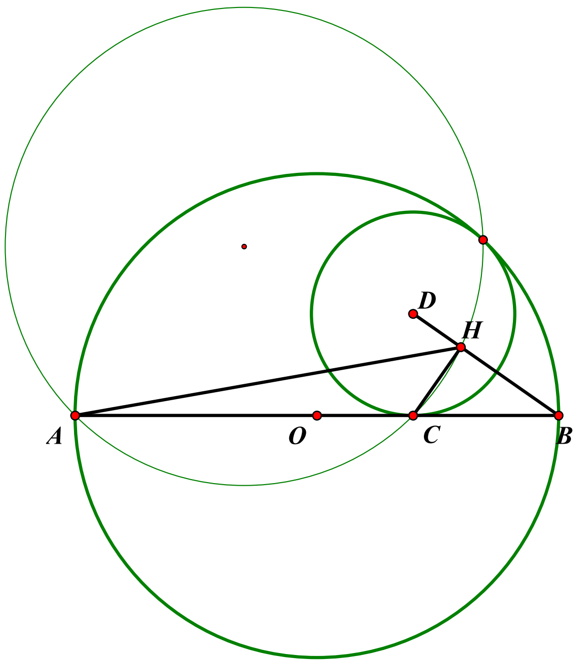
$\angle AHB = 135°$ olduğunu fark edince, çizim programına gerek kalmıyor. Çizim programı, geometrik yer sorusunu çözmez; geometrik yer hakkında fikir verir. Aslına bakarsanız, ben ilk başta $\angle AHB = 135°$ olduğunu fark etmedim. $\angle AHC = 45°$ değerine yoğunlaştığım için, bunu ilk olarak kaçırdım. Sonra Geoemeter's Sketchpad AB yayına benzer bir şekil çıkarınca, hemen fark ettim.

Böylelikle aşağıdaki soruyu elde etmiş olduk.

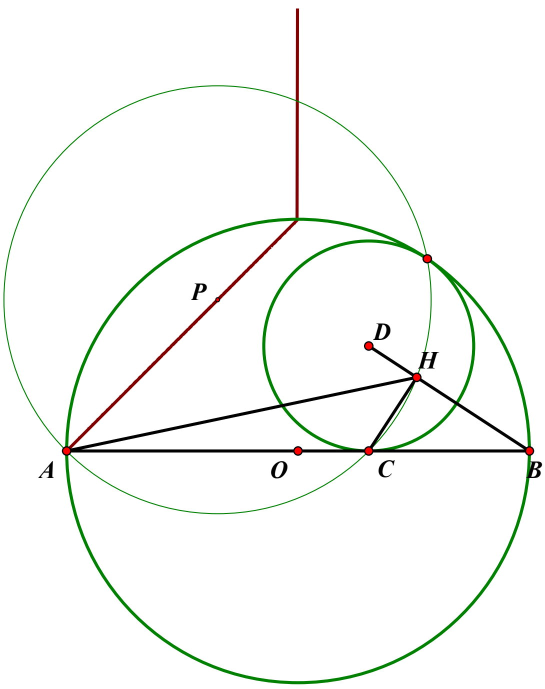
Soru 9:

AB çaplı bir yarım çember veriliyor. C, $[AB]$ üzerinde hareketli bir noktadır. Yarım çembere teğet olan D merkezli çember, AB çapına da C noktasında teğettir. C den BD ye inilen dikmenin ayağı H ise, H noktasının geometrik yeri nedir?

Tekrardan, AHC üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin geometrik yeri konusuna dönelim.



$\angle APC = 90°$ olduğunu, P nin AC çaplı çember üzerinde yer aldığını daha önce söylemiştik. Ama AC sabit değil. Programımızın geometrik yer özelliğini çalıştırınca, P için aşağıdaki gibi bir şekil elde ediyoruz.



Bu nasıl geometrik yer? Aslında $C = B$ olduğunda büyük ihtimalle P sonsuzda çıkıyor. Ondan dolayı dairenin dışında kalan kısmı önemsemeyelim. Gerçekten de, $A = C$ olduğunda $P = A$ dan başlayıp, $B = C$ olduğunda çemberin ortasına kadar gelecektir. Bu durumda, olası bir geometrik yer, A ile AB

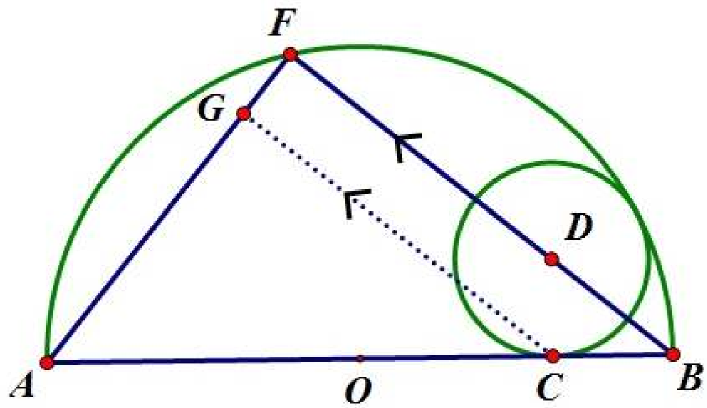
yayının orta noktasını birleştiren doğru parçası olabilir. Bu sefer çözümü yapmadan önce, soruyu soralım. Sonra çözümü yapalım.

Soru 10:

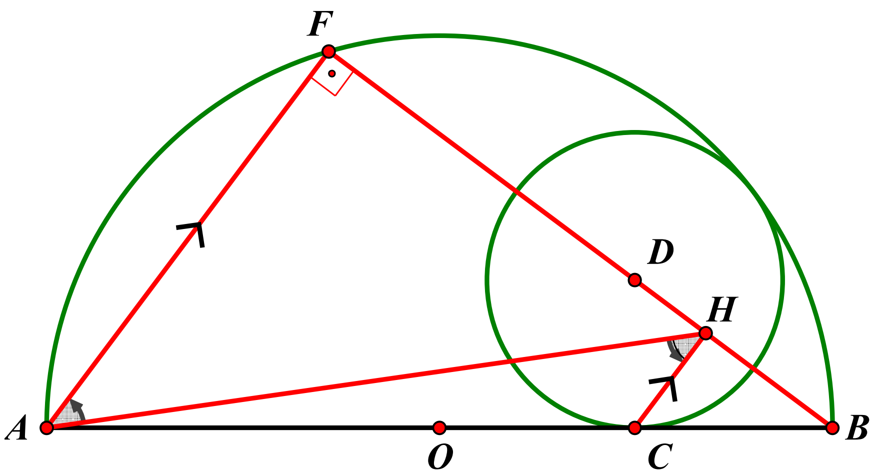
AB çaplı bir yarım çember veriliyor. C, $[AB]$ üzerinde hareketli bir noktadır. Yarım çembere teğet olan D merkezli çember, AB çapına da C noktasında teğettir. C den BD ye inilen dikmenin ayağı H, AHC üçgeninin çevrel merkezi P ise, P noktasının geometrik yeri nedir?

Çözüm:

BH, AB çaplı çemberi F de kessin. C den BF ye çizilen paralel AF yi G de kessin.



(Soru 6'yı elde etmiş olduk.) Yine ilk sorulardan beri kullandığımız eşitliği kullanarak $AC \cdot BC = DC \cdot (AC + BC) = DC \cdot AB \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{CB}$ olduğunu buluruz. Sonra $\frac{AC}{CB} = \frac{CG}{BF}$ ve $\frac{DC}{CB} = \frac{AF}{BF}$ eşitliklerini birleştirerek, $AF = CG = FH$ elde ederiz. Bu durumda AFH üçgeni ikizkenar dik üçgendir. $HC \parallel AF$ olduğu için, $\angle AHC = 45°$ elde edilir.



P çevrel merkez olduğu için $\angle APC = 90°$ ve $AP = CP$ olduğu için de $\angle PAC = 45° = \angle PAB$. Yani P, AB ile $45°$ derecelik açı yapan bir doğru üzerindedir. Bu doğru çemberi AB yayının ortasında keser. A ile AB yayının orta noktasını birleştiren doğru parçası, P noktalarının geometrik yeridir.

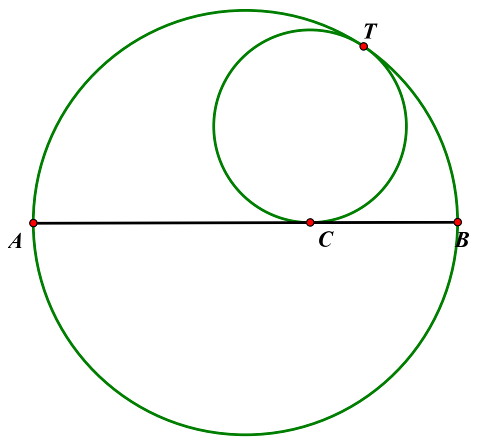
Tam bitirdim derken, The Geometer's Sketchpad'in gerçeğe yakın çizimi yeni bir iddia ortaya atmamıza neden oluyor.

Dikkat ettiyseniz, AHC üçgeninin çevrel çemberi çemberlerin birbirlerine değdikleri noktadan geçiyor. O zaman bu noktaya T dersek, sadece A, B, C ve T noktalarını kullanarak; ACT üçgenlerinin çevrel merkezlerinin geometrik yerini sorabiliriz. Bu da güzel bir soru olur; ama bu T noktası tanıdık geliyor. $\angle AHC = \angle ATC = 45°$. $\angle ATB = 90°$ olduğu için de CT, $\widehat{ATB}$ açısının açıortayı olacaktır. Tabi ki, tüm bunlar $T \in (AHC)$ ise geçerli.

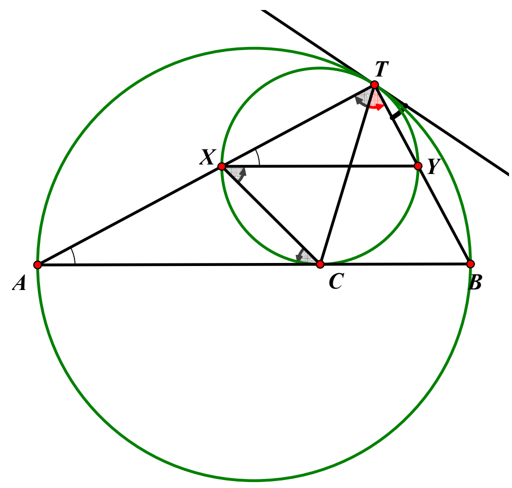
Yine iddiamızı soruya dönüştürelim.

Soru 11:

AB çaplı çembere T noktasında teğet olan çember, AB çapına da C noktasında teğettir. TC nin $\widehat{ATB}$ açısının açıortayı olduğunu gösteriniz.



Çözüm:



AT küçük çemberi X te, BT küçük çemberi Y de kessin. T den geçen teğeti çizelim. Teğet-kiriş açıların eşitliğinden $\angle TXY = \angle TAC$ ve dolayısıyla $XY \parallel AB$ olacaktır. Paralellikten ve teğet-kiriş açıdan dolayı $\angle ATC = \angle XCA = \angle YXC = \angle CTY$ olur. Bu da TC nin açıortay olduğu anlamına gelir.

Yorum:

Dikkat ettiyseniz, AB nin çap olduğu bilgisini kullanmadım. Herhangi bir AB kirişi için TC, ATC açısının açıortayı oluyor. Bu soruyu çözerken, bu sorunun çok genel bir soru olduğunu hatırladım. Evet 11. sorumuz, tekerleği yeniden icat ettirdi. Yine de çok basit bir elementer çözüme sahip bu özellikten faydalanmaya bakalım. Kendimize şu soruyu soralım: TC nin açıortay olduğu bilgisini kullanarak önceki soruları kısa yoldan çözebilir miyiz? Ya, nasıl ki bu soruda AB nin çap olması bir şey değiştirmiyorsa, önceki sorularda da buna benze durumlar olabilir.