



TÜBİTAK

**ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİ ARASI ARAŞTIRMA PROJELERİ YARIŞMASI
(2007–2008)**

GEOMETRİ PROBLEMLERİNE HARMONİK YAKLAŞIM

Projeyi Hazırlayan Öğrencilerin

Adı Soyadı : Semih YAĞCI
Sınıf ve Şubesi : 10-A
Adı Soyadı : Uğur KARABAĞ
Sınıf ve Şubesi : 10-A
Okulun Adı : Eskişehir Fatih Fen Lisesi
Danışman Öğretmen : Osman EKİZ

ESKİŞEHİR
2008

ÖZET

Düzlem geometri problemlerinin veya teoremlerinin çözümünde bir lise öğrencisinin rahatlıkla anlayabileceği klasik metotlar kullanılır. Olimpiyat problemlerinde de durum hemen hemen aynıdır. Sıra dışı tekniklere pek rastlanmaz.

Mevcut problemlere farklı çözüm yöntemleri bulma arayışlarımız bizi harmonik bölüm kavramı ile tanıştırdı. Harmonik bölüm kavramı yardımıyla çeşitli problem ve teoremlere özgün çözümler ürettik. Farklı çözümler yaparken yeni problemler de geliştirdik.

Çalışmamızda kaynak taraması yaparak konu ile alakalı daha önce yapılmış çalışmalar tespit edilmeye çalışılmış ve bir kaç matematik forumunda bazı uygulamalar bulunmuştur¹. Bu uygulamalardan farklı olarak harmonik bölüm kavramını uygulayabileceğimiz problem ve teoremler araştırılmış ve bu problemlere daha önceden yapılmamış farklı ve özgün çözümler üretilmiştir.

Çalışmalarımız bizde bahis konusu yöntemin birçok problemin içerisinde var olduğu ama gözden kaçtığı kanaatini uyandırmıştır. Harmonik bölümün kullanışlı, açık ve anlaşılır bir yöntem olduğu sonucu ortaya çıkmıştır. Özellikle noktadaşlık veya doğrusallık içeren problemlerin çözümünde etkin bir yöntem olduğunu düşünmekteyiz.

¹ <http://www.mathlinks.ro/Forum/> sitesinde harmonik bölümün bazı uygulamaları mevcuttur.

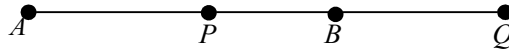
GİRİŞ. Proje çalışmamız bir matematik forumundaki² bazı problemlerden yola çıkarak başlamıştır. Çalışmamızın amacı; geometri ile alakalı teorem veya problemlerin ispatlarına harmonik bölüm kavramını kullanarak yeni bir yaklaşım getirmek ve özgün çözümler üretmektir.

Kaynak taraması yaptığımızda harmonik bölüm kavramı yardımıyla problemlerin çözüldüğü görülmüştür³. Biz bu çalışmalardan farklı olarak çoğu lise öğrencisinin bildiği teoremlere de bu yöntemi uyguladık ve yeni problemler ürettik.

YÖNTEM. Çalışmamızda kullanacağımız veriler için kaynak taraması yapıldı. Harmonik bölüm ile alakalı temel tanım ve teoremler belirlendi. Bu bilgiler çeşitli problem ve teoremlerin ispatları için kullanıldı.

Çalışmamıza, gerekli tanım ve yardımcı teoremleri vererek geçelim.

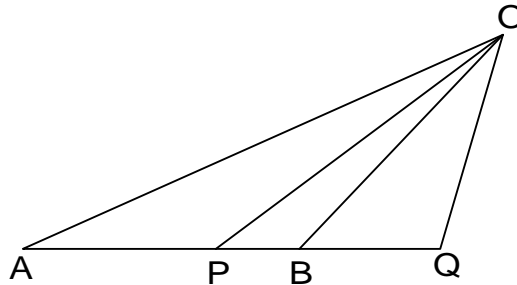
Tanım. Bir d doğrusu ile bu doğru üzerinde A ve B noktaları verilsin. P noktası $[AB]$ 'yi içten, Q noktası ise dıştan bölen birer nokta olsun. Eğer $\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|PB|}{|BQ|}$ ise P ve Q noktaları $[AB]$ 'yi harmonik olarak bölüyor denir. Bu dört nokta harmonik bölüm yada kısaca harmonik olarak adlandırılır ve $(AB;PQ)$ biçiminde gösterilir. Ayrıca P ve Q noktalarına A ve B noktalarına nazaran birbirinin harmonik eşleniği denir.



Sonuç-1. $(AB;PQ)$ harmonik ise $(PQ;AB)$, $(BA;PQ)$ ve $(AB;QB)$ 'de harmoniktir. Biz bir tanesinin ispatını yapalım. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanabilir.

İspat: $(AB;PQ)$ harmonik ise $\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|PB|}{|BQ|} \Rightarrow \frac{|BQ|}{|AQ|} = \frac{|PB|}{|AP|} \Rightarrow \frac{|QB|}{|QA|} = \frac{|BP|}{|PA|}$ $(PQ;AB)$ harmoniktir.

Tanım. Bir doğru üzerinde sırasıyla A, P, B, Q noktaları ve bu doğru üzerinde olmayan bir O noktası verilsin. Eğer $\frac{\sin AOP}{\sin AOQ} = \frac{\sin POB}{\sin BOQ}$ ise $[OP]$ ve $[OQ]$ ışınları AOB açısını harmonik bölüyor denir. $[OA, [OP, [OB, [OQ]$ ışın demetine harmonik ışın demeti denir ve $O(AB;PQ)$ biçiminde



gösterilir. Burada $[OP]$ ve $[OQ]$ ışınları ise $[OA]$ ve $[OB]$ ışınlarına göre harmonik eşlenik ışınlar olarak adlandırılır. Biz harmonik ışın demeti yerine kısaca harmonik ışın adlandırmasını kullanacağız.

² <http://www.geomania.org/index.php?topic=359.0>

³ www.mathlinks.ro sitesinde çeşitli uygulamalar mevcuttur.

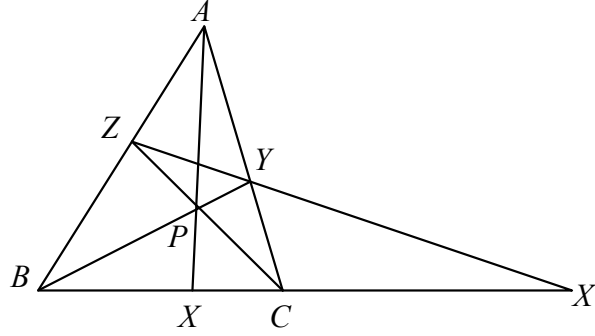
Doğal olarak OP ve OQ ışınları AOB açısını harmonik olarak bölüyorsa OA ve OB ışınları da POQ açısını harmonik olarak böler.

Çünkü $O(AB;PQ)$ ise $\frac{\sin AOP}{\sin POB} = \frac{\sin AOQ}{\sin BOQ} \Rightarrow \frac{\sin POB}{\sin BOQ} = \frac{\sin AOP}{\sin AOQ}$ olur ki bu ise OA ve OB

ışınlarının da POQ açısını harmonik böldüğünü gösterir. Dolayısı ile $O(QP; BA)$ harmonik ışındır.

Projemizde kullanacağımız yardımcı teoremler verelim.

Y.Teorem-1. ABC üçgeninin BC , CA ve AB kenarları üzerinde sırasıyla X , Y , Z noktaları verilsin. BC ile ZY 'nin kesim noktası X' olsun $(X'X; CB)$ 'nin harmonik olması için gerek ve yeter şart AX , BY ve CZ 'nin noktadaş olmasıdır.



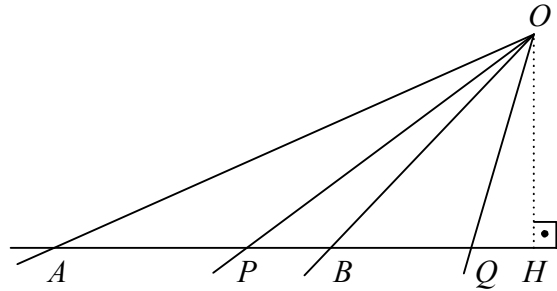
İspat:

Yeterlilik: $(X'X; CB)$ harmonik olsun. Bu durumda $\frac{X'C}{X'B} = \frac{XC}{XB}$ dir (1). Menaleus teoremin-

den; $\frac{X'C}{X'B} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$ olup (1)'den $\frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$ olup Seva teoreminin karşıtı gereğince AX , BY , CZ noktadaştır.

(Gereklilik): AX , BY , CZ noktadaş olsun. Menaleus teoreminden $\frac{X'C}{X'B} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$ ve Seva teoreminden $\frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$ olup taraf tarafa oranlarsak $\frac{X'C}{X'B} \cdot \frac{XB}{XC} = 1 \Rightarrow \frac{X'C}{X'B} = \frac{XC}{XB}$ olur ki bu ise $(X'X; CB)$ 'nin harmonik olduğunu gösterir.

Y.Teorem-2. Bir d doğrusu üzerinde sırasıyla A , P , B , Q noktaları ve bu doğru üzerinde olmayan bir O noktası verilsin. $O(AB; PQ)$ 'nin harmonik ışın olması için gerek ve yeter şart $(AB; PQ)$ 'nin harmonik olmasıdır.



İspat:

Yeterlilik: $O(AB; PQ)$ harmonik ışın ve $OH \perp AQ$ olsun. Sinüs alan bağıntısından

$$\begin{aligned} HO \cdot AP &= OA \cdot OP \sin AOP \\ HO \cdot AQ &= OA \cdot OQ \sin AOQ \end{aligned} \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{OP \sin AOP}{OQ \sin AOQ} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} HO.PB &= OB.OP \sin POB \Rightarrow \frac{PB}{BQ} = \frac{OP}{OQ} \cdot \frac{\sin POB}{\sin BOQ} \quad (2) \text{ eşitliklerini yazabiliriz. } O(AB;PQ) \\ HO.BQ &= OB.OQ \cdot \sin BOQ \end{aligned}$$

harmonik ışın olduğundan $\frac{\sin AOP}{\sin AOQ} = \frac{\sin POB}{\sin BOQ}$ (3) olup 1,2 ve 3'ten $\frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{BQ}$ dir. Bu durumda $(AB;PQ)$ harmoniktir

Gereklilik: $(AB;PQ)$ harmonik ise $\frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{BQ}$ dur. Sinüs alan bağıntısından

$$\begin{aligned} HO.AP &= OA.OP \sin AOP \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{OP}{OQ} \frac{\sin AOP}{\sin AOQ} \\ HO.AQ &= OA.OQ \cdot \sin AOQ \end{aligned}$$

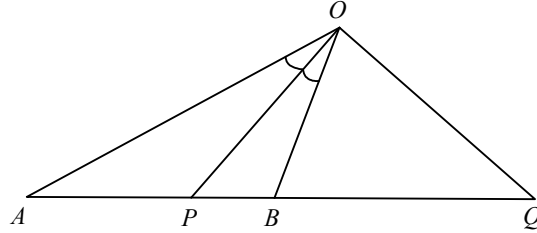
$$\begin{aligned} HO.PB &= OP.OB \sin POB \Rightarrow \frac{PB}{BQ} = \frac{OP}{OQ} \cdot \frac{\sin POB}{\sin BOQ} \text{ yazabiliriz. } \frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{BQ} \text{ olduğundan} \\ HO.BQ &= OB.OQ \cdot \sin BOQ \end{aligned}$$

$\frac{\sin POB}{\sin BOQ} = \frac{\sin AOP}{\sin AOQ}$ olur. Dolayısı ile $O(AB; PQ)$ harmonik ışındır.

Y.Teorem-3. Bir d doğrusu üzerinde sırasıyla A, P, B, Q noktaları ve bu doğru üzerinde olmayan bir O noktası verilsin.

- i) $(AB; PQ)$ harmoniktir.
- ii) AOB açısının iç açıortayı OP 'dir.
- iii) $OP \perp OQ$ dur.

Yukarıda belirtilen iddialardan herhangi ikisi doğru ise diğeri de doğrudur.



İspat: i ve ii doğru ise iii de doğrudur.

$(AB; PQ)$ harmonik ise $(QP; BA)$ da harmoniktir. $\frac{QB}{QA} = \frac{BP}{PA}$ (1) ve AOB üçgeninde OP açıortay olduğundan $\frac{OB}{OA} = \frac{BP}{PA}$ (2) olur. (1) ve (2)'den $\frac{QB}{QA} = \frac{OB}{OA}$ olur. Bu eşitlik bize OQ 'nin AOB açısının dış açıortayı olduğunu gösterir. Bu durumda $OP \perp OQ$ dir.

i ve iii doğru ise ii de doğrudur.

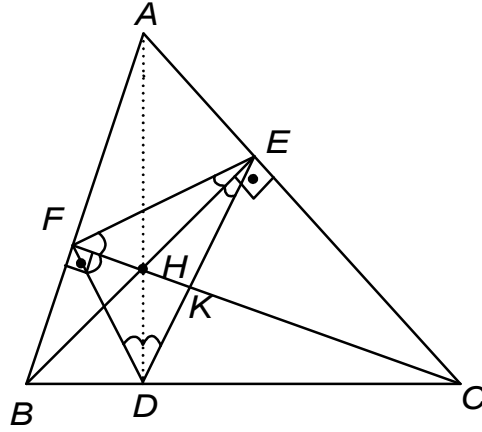
$(AB; PQ)$ harmoniktir olduğundan $O(AB; PQ)$ harmonik ışındır. Dolayısı ile

$$\frac{\sin AOP}{\sin POB} = \frac{\sin AOQ}{\sin BOQ} \Rightarrow \frac{\sin AOP}{\sin POB} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + AOP\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - POB\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin AOP}{\sin POB} = \frac{\cos AOP}{\cos POB} \Rightarrow \sin AOP \cdot \cos POB - \sin POB \cdot \cos AOP = 0 \text{ olup } \sin(AOP - POB) = 0$$

$\sin(AOP - POB) = 0 \Rightarrow \angle AOP = \angle POB$ veya $\angle AOP - \angle POB = \pi$ dir. $\angle AOP - \angle POB = \pi$ olmayacağından $\angle AOP = \angle POB$ olmalıdır. Dolayısı ile AOP açısının açıortayı OP 'dir.

Teorem-3. Bir üçgenin yükseklikleri noktadadır.

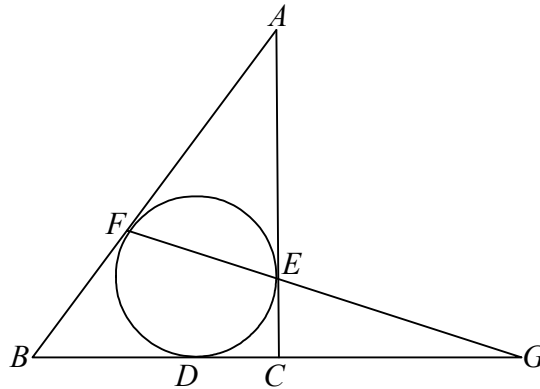


İspat-1: CF ve BE yükseklikleri H noktasında kesişsin. AD nin yükseklik olduğunu gösterirsek iddiamız ispatlanmış olur.

Blanchet Teoreminden FH ve EH , DEF üçgeninin iç açıortayları olup iç açıortaylar noktadaş olduğundan DH da FDE açısının açıortayı olur. Blanchet teoreminin karşısından AD yükseklik olur.

İspat-2: EH açıortay ve $EH \perp CE$ olup **Y.Teorem-1**'den $(CH;KF)$ harmoniktir. $(CH;KF)$ harmonik ve DH açıortay olduğundan yine **Y.Teorem-1**'den $HD \perp DC$ olup AD yükseklik olur.

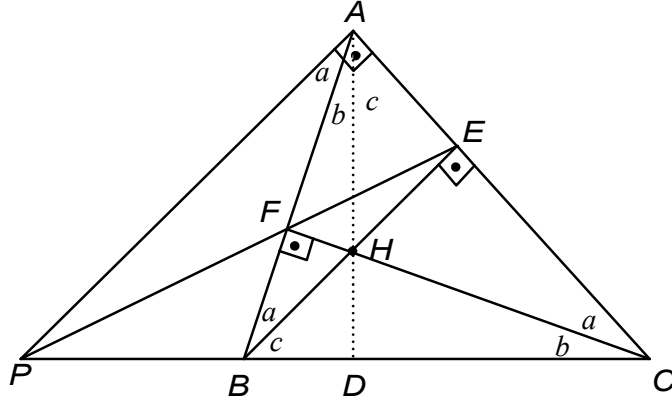
Teorem-4. ABC üçgeninin iç teğet çemberi BC , CA , AB kenarlarına sırasıyla D , E ve F noktasında teğet olsun. AD , BE ve CF nin noktadaş olduğunu ispatlayınız.



İspat: D , E , F değme noktaları olduğundan $EC = CD$, $DB = BF$ ve $FA = AE$ 'dir. Menaleus teoreminden $\frac{GC}{GB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} = 1 \Rightarrow \frac{GC}{GB} \cdot \frac{BD}{FA} \cdot \frac{FA}{DC} = 1 \Rightarrow \frac{GC}{GB} = \frac{CD}{DB}$ olup $(GD;CB)$ harmoniktir. Dolayısı ile **Y.Teorem-1**'den AD , BE ve CF noktadaştır.

Harmonik bölümü çeşitli olimpiyat problemlerinin çözümünde nasıl kullandığımıza dair örnekler verelim.

Problem-1[Belarus Matematik Olimpiyatı-2005]. ABC dar açılı üçgeninin BE ve CF yükseklikleri H noktasında kesişsin. A 'dan geçen BE 'ye paralel bir ℓ doğrusu çizilsin. BC , EF ve ℓ 'nin noktadaş olması için gerek ve yeter şart H noktasının BE 'nin orta noktası olmasıdır.



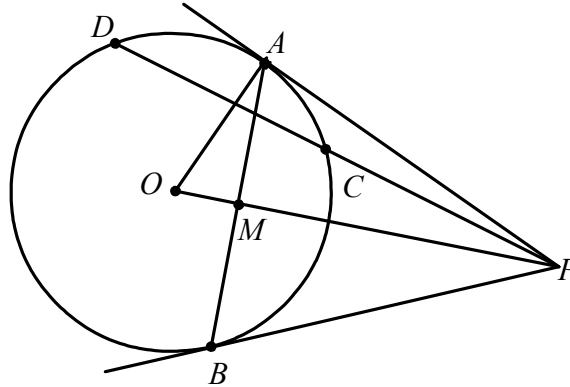
İspat: Bir üçgende yükseklikler bir noktada kesiştiği için BE , CF ve AD yüksekliklerinin kesim noktası H 'dir. **Y.Teorem-1**'den $(PD;BC)$ harmonik ve buradan $A(PD;BC)$ harmonik ışın olup $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin(a+b+c)}{\sin c}$ ve buradan $\sin a = \frac{\sin b}{\sin c}$ (1)'dir. BHC üçgeninde sinüs teoreminden $\frac{BH}{HC} = \frac{\sin b}{\sin c}$ (2) ve CEH dik üçgeninde $\frac{HE}{HC} = \sin a$ (3) olur.(1), (2) ve (3)'ten $BH = HC$ olup buradan H noktasının BE 'nin orta noktası olduğu ispatlanmış olur.

Karşıt olarak H noktası BE 'nin orta noktası olsun. CEH dik üçgeninde $\frac{HE}{HC} = \sin a$ ve

BHC üçgeninde sinüs teoreminden $\frac{BH}{HC} = \frac{\sin b}{\sin c}$ dir. $BH = HE$ olduğundan $\sin a = \frac{\sin b}{\sin c} \Rightarrow \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{1}{\sin c} \Rightarrow \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin 90}{\sin c} = \frac{\sin(a+b+c)}{\sin c}$ olur. Dolayısı ile $A(PD;BC)$ harmonik ışın olup **Y.Teorem-2**'den $(PD;BC)$ harmonik ve **Y.Teorem-1**'den BC , EF ve ℓ noktadaştır.

Çalışmamız için önemli bir problem verelim.

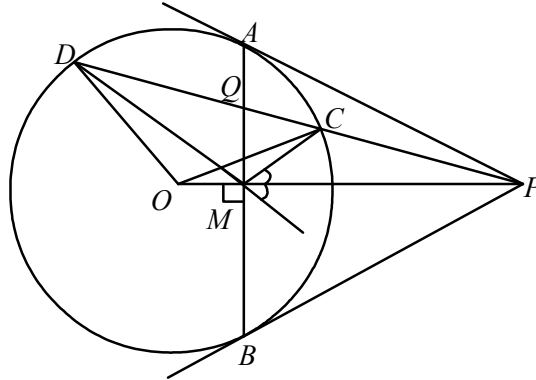
Problem-2. O merkezli çembere dışındaki bir P noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları A ve B 'dir. P 'den geçen bir doğru çemberi sırasıyla C ve D noktalarında kessin. AB ile OP 'nin kesim noktası M ise $DOMC$ dörtgeninin kirişler dörtgeni olduğunu ispatlayınız.



İspat: $OA \perp PA$ ve $OP \perp AB$ 'dir. P noktasına göre dış kuvvetten; $PA^2 = PC.PD$ 'dir. APO ve MPA üçgenleri benzer olduğundan $PA^2 = PM.PO$ olup $PC.PD = PM.PO \Rightarrow \frac{PC}{PO} = \frac{PM}{PD}$ (1) dir. MCP ve DOP üçgenlerinde MPC ortak açı ve (1)'den PCM ve POD üçgenleri benzer olur. $\Rightarrow \angle MCP = \angle DOP$ olup bu ise $DOMC$ 'nin kirişler dörtgeni olduğunu gösterir.

Sıradaki problemin sonucu **Problem-2**'nin önemini ortaya koyması bakımından oldukça ilgi çekicidir. Bu problem yardımıyla çözümü oldukça uzun ve zor olan, bilinen bazı problemleri sıra dışı bir yöntem olan harmonik bölmeden faydalanarak çözeceğiz.

Problem-3. Bir çembere dışındaki bir P noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları A ve B olsun. P 'den geçen bir doğru çemberi sırasıyla C ve D noktalarında kessin. PD ile AB 'nin kesim noktası Q olmak üzere $(PQ;CD)$ 'nin harmonik olduğunu ispatlayınız.

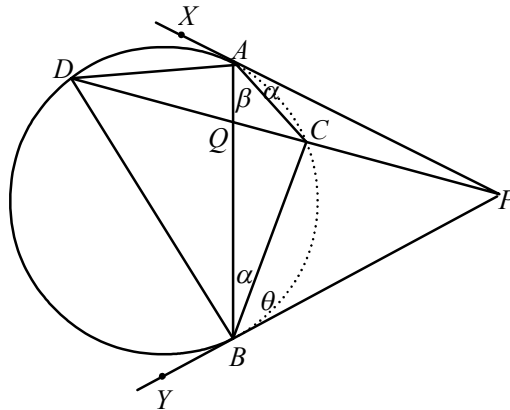


İspat. Çemberimizin merkezi O ve AB ile PO 'nun kesim noktası M olsun. **Problem-2**'den $DOMC$ kirişler dörtgenidir. Ayrıca O merkez olduğundan $\angle ODC = \angle OCD$ ve $DOMC$ kirişler dörtgeni olduğundan $\angle ODC = \angle CMP$ ve $\angle OCD = \angle DMO \Rightarrow \angle DMO = \angle CMP$ dir. Bu durum da PM, MDC üçgeninin dış açıortayı olur. $\Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{MC}{MD}$ dir.(1) $AB \perp OP$ olduğundan MQ da MDC üçgeninin iç açıortayı olur. $\Rightarrow \frac{MC}{MD} = \frac{CQ}{QD}$ (2) dir. (1) ve (2)'den $\frac{PC}{PD} = \frac{CQ}{QD}$ olup bu $(PQ;CD)$ 'nin harmonik olduğunu gösterir.

Bu problemden esinlenerek sıradaki problemi oluşturduk.

Problem-4. Bir çembere dışındaki P noktasından çizilen teğetin değme noktası A olsun. P 'den geçen bir doğru çemberi sırasıyla C ve D noktalarında kessin. PD üzerinde $(PQ;CD)$ harmonik olacak şekilde bir Q noktası alınsın. AQ ise çemberi B noktasında kessin. PB 'nin çembere teğet olduğunu ispatlayınız.

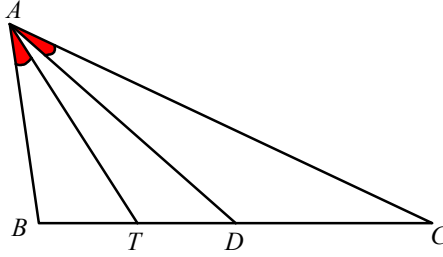
İspat: Açılardan bazılarıyı şekildeki gibi isimlendirelim. $\beta = \theta$ olduğunu ispatlarsak PB 'nin



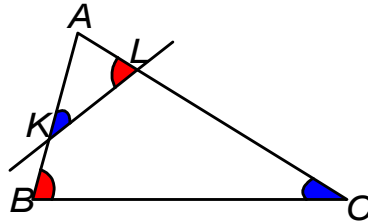
çembere teğet olduğunu ispatlamış oluruz. $(PQ;CD)$ harmonik olduğundan $A(PQ;CD)$ ve $B(PQ;CD)$ harmonik ışın olup $\frac{\sin \alpha}{\sin PAD} = \frac{\sin \beta}{\sin QAD} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin DAX} = \frac{\sin \beta}{\sin QAD}$ ve $\frac{\sin \theta}{\sin PBD} = \frac{\sin \alpha}{\sin QBD}$
 $\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\sin DBY} = \frac{\sin \alpha}{\sin QBD}$ olur. $\angle QBD = \angle DAX$ ve $\angle QAD = \angle DBY$ olduğunu da göz önüne alırsak
 $\frac{\sin \alpha}{\sin QBD} = \frac{\sin \beta}{\sin QAD}$ ve $\frac{\sin \theta}{\sin QAD} = \frac{\sin \alpha}{\sin QBD}$ eşitliklerini elde ederiz. Taraf tarafa oranlarsak
 $\sin \beta = \sin \theta$ olup $\beta + \theta \neq \pi$ olduğundan $\beta = \theta$ olmalıdır.

Problem–3 ve **Problem–4** sıradaki problemi çözmemizi oldukça kolaylaştıracak. Bu sebeple bazı tanımlar verelim.

Tanım. Bir üçgende kenar ortayın iç açıortaya göre simetriğine simedyan denir. AD kenarortay ve AT simedyan ise $\angle BAT = \angle CAD$ dir.



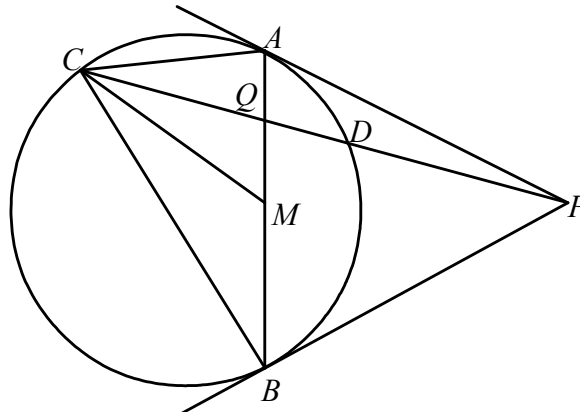
Tanım. ABC üçgeninin AB ve AC kenarları üzerinde K ve L noktaları alalım. Eğer $\angle ACB = \angle AKL$ oluyorsa KL doğrusu BC 'ye anti-paraleldir denir.



Problem–5. ABC üçgeninin çevrel çemberine A ve B noktalarından çizilen teğetler P noktasında kesişsin.

i) CP 'nin ABC üçgeninin bir simedyanı olduğunu ispatlayınız.

ii) AQ 'nin CAD üçgeninin bir simedyanı olduğunu ispatlayınız.

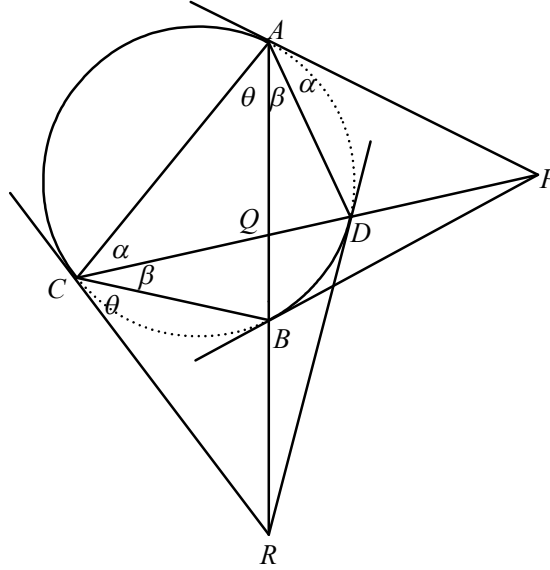


İspat-i: Çevrel çemberin merkezi O , AB 'nin orta noktası M , AB ile PC 'nin kesim noktası Q ve PC 'nin çemberi kestiği nokta D olsun.

$\angle ACD = \alpha$ ve $\angle CBM = \beta$ olsun. $\Rightarrow \angle ACD = \angle ABD = \alpha \Rightarrow \angle DOC = 2\alpha + 2\beta$ dir. **Problem-2'**den $COMD$ kiriş dörtgeni olup $\angle CMD = \angle COD = 2\alpha + 2\beta$ dir. **Problem-3'**te MQ 'nun CMD açısını ortaladığı gösterildiğinden $\angle CMQ = \alpha + \beta \Rightarrow \angle BCM = \alpha$ olur. $\angle BCM = \angle ACQ$ ve CM kenarortay olduğunda CQ , ACB üçgeninin simedyanıdır.

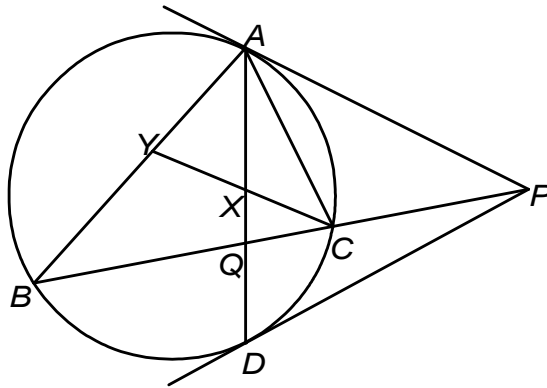
İspat-ii: Çembere C de teğet olan doğru ile AQ , R de kesişsin. Biz RD nin çembere teğet olduğunu gösterirsek ispat-i den dolayı AR , CAD üçgeninin simedyanı olacaktır.

Açıları şekildeki gibi isimlendirelim. $A(PQ;DC)$ harmonik ışın olduğundan



$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta + \theta)} = \frac{\sin \beta}{\sin \theta}$ olur. Bu eşitlik $C(RQ;BA)$ 'nin harmonik ışın olduğunu gösterir. **Problem-4'** ten dolayı RD çembere teğet olur.

Problem-6. Bir üçgende herhangi bir kenara ait simedyanın yine o kenara ait anti-parallelere ortaladığını ispatlayınız.



İspat: Yandaki şekli incelersek bir önceki problemten AQ 'nun ABC üçgeninin simedyanı olduğunu biliyoruz. **Problem-3'**ten $(PQ;CB)$ harmonik olup $\frac{PC}{PB} = \frac{CQ}{QB}$ dir (1). $AP \parallel YC$ olsun.

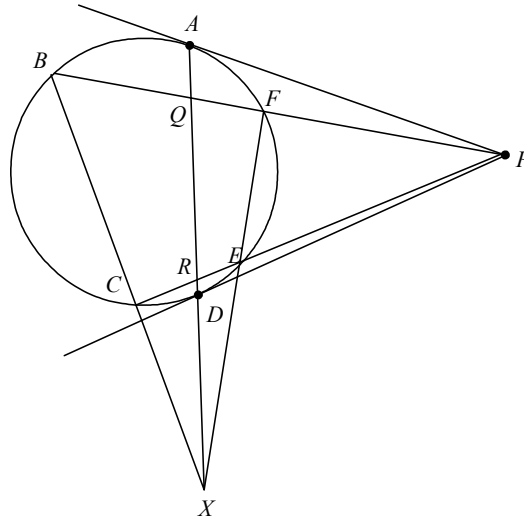
Bu durumda $\frac{AY}{AB} = \frac{PC}{PB}$ (2) yazabiliriz. (1) ve (2)'den $\frac{AY}{AB} = \frac{CQ}{QB}$ (3) olur. ABQ üçgeninde CY

kesenine göre Menaleus teoreminden $\frac{AY}{AB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CX}{XY} = 1$ ve (3)'ten $CX = XY$ eşitliğini elde

ederiz. $AP \parallel YC$ olduğundan $\angle ABC = \angle CAP = \angle ACY$ dir. Bu son eşitlik YC 'ye paralel olan ve AB ve AC 'yi kesen doğruların BC 'ye anti-paralel olduğunu gösterir. Dolayısı ile $YX = XC$ olduğu da işin içine katılırsa AQ simedyanı BC 'ye anti-paralel olan doğruları ortalar.

Yine bir olimpiyat problemini harmonik yaklaşım ile çözelim.

Problem-7[Avusturya-Polonya Matematik Olimpiyatı-1998]. Bir çember üzerinde A, B, C, D, E, F noktaları aynı sırada verilsin. Çemberin A ve D noktalarındaki teğetleri ile BF ve CE noktadaş olsun. Buna göre ispatlayınız ki; AD, BC, EF ya paraleldir ya da noktadaştır.



İspat: BF ve CE , P noktasında ve BC ile FE ise X noktasında kesişsin. **Problem-3**'den $(PQ; FB)$ ve $(PR; EC)$ harmoniktir. Dolayısı ile **Y.Teorem-2**'den $X(PQ; FB)$ ve $X(PR; EC)$ harmonik ışındır.

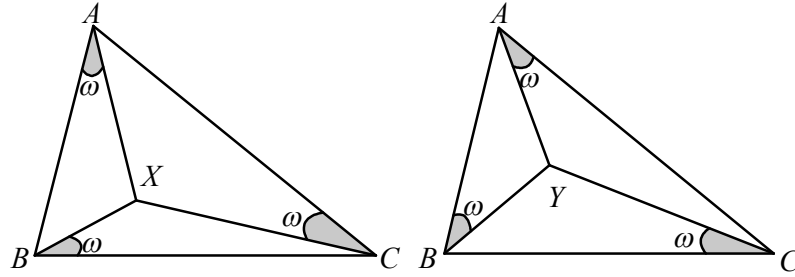
$\angle PXF = \alpha$, $\angle FXE = \beta$, $\angle QXE = \theta$ ve $\angle QXB = \gamma$ olsun. $X(PQ; FB)$ ve $X(PR; EC)$ harmonik ışın olduğundan $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \theta} = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma + \theta)}{\sin \gamma}$ ve $\frac{\sin \alpha}{\sin(\theta + \beta)} = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma + \theta)}{\sin \gamma}$ olup

$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \theta} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta + \beta)}$ ve buradan $\sin(\alpha + \beta)\sin(\theta + \beta) = \sin \alpha \sin \theta$ eşitliğini elde ederiz.

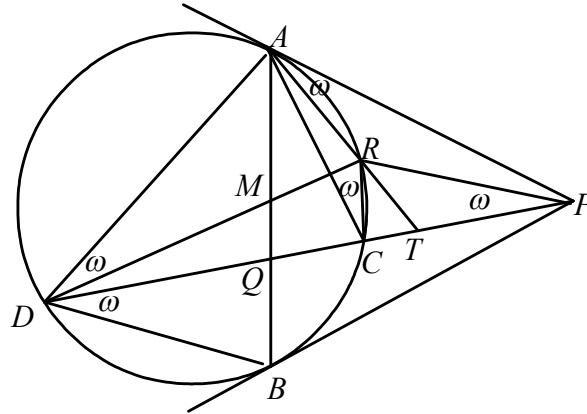
Düzenlersek $\cos(\alpha + \theta + 2\beta) - \cos(\alpha - \theta) = \cos(\alpha + \theta) - \cos(\alpha - \theta)$ olup $\alpha + \theta + 2\beta = \alpha + \theta$ veya $\alpha + \theta + 2\beta = -\alpha - \theta$ olacaktır. Buradan $\beta = 0$ veya $\alpha + \beta + \theta = 0$ olur. İlk eşitlik noktadaş olma durumunu ikinci eşitlik paralel olma durumunu ispatlar.

Tüm bu yaptıklarımız bizce estetik olan şu problemi üretmemizi sağladı. Önce problemde kullanacağımız bir kavramı verelim.

Tanım. Bir üçgenin iç bölgesinde $\angle XAB = \angle XBC = \angle XCA$ olmasını sağlayan X noktasına ABC üçgeninin **Birinci Brocard Noktası** benzer şekilde $\angle YAC = \angle YBA = \angle YCB$ olmasını sağlayan Y noktasına **İkinci Brocard Noktası** denir.



Problem. Bir çembere dışındaki bir P noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları A ve B ve AB 'nin orta noktası M olsun. P den geçen bir doğru çembere sırasıyla C ve D noktalarında AB 'yi de M 'den farklı olarak Q da kessin. DM 'nin çembere kestiği nokta R ve AR ile PD 'nin kesim noktası T olsun. Eğer PQ 'nin orta noktası T ise R noktasının PAD ve PAC üçgenlerinin 2. brocard noktası olduğunu ispatlayınız.



İspat: $\angle ADM = \omega$ olsun. $\angle ADM = \angle PAR = \angle RCA = \omega$ olacaktır. T noktasına göre dış kuvvetten $TC.TD = TR.TA$ dir. **Y.Teorem-4**'ten $TC.TD = PT^2$ dir. Bu durumda $PT^2 = TR.TA$ olacaktır. Bu ise ATP ve PTR üçgenlerinin benzer olduğunu yani $\angle RPT = \omega$ olduğunu gösterir. Bu durumda iddiamız ispatlanmış olur

Ayrıca bu problemde şu sonuçları da elde ettik. Fakat fazla uzatmamak için ispatlarını vermiyoruz.

- 1.C noktası BRP üçgeninin 1. Brocard Noktasıdır.
- 2.Q noktası RDB üçgeninin 1. Brocard Noktasıdır.
3. AC, AQP üçgeninin simedyanıdır.
4. $RQ \parallel AD$ dir.

Elde ettiğimiz bu problemde birçok orijinal soru üretilebileceği kanaatindeyiz.

SONUÇ: Araştırmamızda ele aldığımız problemler ve teoremler için incelediğimiz kaynaklarda mevcut olmayan çözümler ürettik. Bu sebeple harmonik bölüm problem çözmede etkin bir yöntemdir.

Geometri problemlerinde aslolan sentetik çözümlerdir. Fakat yaptığımız çözümlerde temel bazı trigonometrik bağıntıların kullanılması çözümlerin etkileyiciliğini kısmen de olsa azaltmıştır. Fakat harmonik bölüm yapısı itibariye trigonometrik özellikleri içinde barındırdığından bu durumdan kaçınmak da mümkün değildir.

Veri toplama esnasında bu yöntemin kullanıldığı az sayıda örnek bulduk. Kitaplarda genellikle harmonik bölümün ne olduğuna ve bazı özelliklerine yer verilmiştir. Araştırmamız da esas aldığımız kitapta da durum aynıdır. Konunun problem çözmede bir yöntem olduğuna dair açıklamalara rastlanmamıştır. Bu açıdan çalışmamızın, farklı bir bakış açısı sunması yönüyle faydalı olduğu kanaatindeyiz.

Ayrıca çalışmalarımız sayesinde yeni problemler ürettik. Ürettiğimiz problemler olimpiyatlar için önerilebilecek mahiyettedir.

KAYNAKÇA:

1. R.Lachlan, An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry, London–1893
2. V.Prasolov, Problems in Plane and Solid Geometry
3. Çeşitli ülkelerin matematik olimpiyatlarına ait kitapçıklar