

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} kümesinin dört tane ardışık tam sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?
a) 596 b) 648 c) 679 d) 773 e) 812

Çözüm:

Problemi n elemanlı bir küme için çözelim. $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ olsun. A kümesinden ardışık dört tane tamsayı içermeyen bir S alt kümesi aldığımızı düşünelim. A_n , n elemanlı bir kümenin ardışık dört tane tamsayı içermeyen alt kümelerinin sayısı olsun. Alabileceğimiz alt kümeleri dört guruba ayırabiliriz.

1.Gurup: Eğer n , $n-1$ ve $n-2$, S alt kümesinin elemanları ise S alt kümesi verilen şart gereği $n - 3$ elemanını içermez. Böylelikle yazabileceğimiz alt kümelerin sayısı A_{n-4} tür. Yani $n - 4$ tane elemanı olan kümenin dört tane ardışık sayı içermeyen alt küme sayısı kadardır.

2.Gurup: Eğer n ve $n-1$ elemanları S alt kümesinin elemanı fakat $n - 2$ elemanı değil ise, ardışık dört tamsayı içermeyen A_{n-3} tane alt küme tanımlayabiliriz.

3.Gurup: Eğer n elemanı S alt kümesinin elemanı fakat $n - 1$ elemanı S alt kümesinin elemanı değil ise bulabileceğimiz alt küme sayısı A_{n-2} olacaktır. (kullanabileceğimiz $n-2$ eleman kaldığı için)

4.Gurup: Son olarak, eğer dört tane ardışık tamsayı içermeyen S alt kümesi n elemanını içermiyor ise yazabileceğimiz alt kümelerin sayısı A_{n-1} olarak bulunur.

Yazabileceğimiz bütün alt kümeler bu dört guruptan mutlaka birinin içerisinde ve bir alt küme birden fazla gurubun içerisinde yer alamaz.

Böylelikle n elemanlı bir küme için ardışık dört tane tamsayı içermeyen alt kümelerin sayısı

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3} + A_{n-4}$$

indirgemeli dizisi olarak belirlenir ve başlangıç değerlerinin

$A_0 = 1$, (sadece \emptyset şartı sağlar.)

$A_1 = 2$, (\emptyset ve $\{1\}$ şartı sağlar.)

$A_2 = 4$, ($\emptyset, \{1\}, \{2\}$ ve $\{1,2\}$ kümeleri verilen şartı sağlar.)

$A_3 = 8$, (3 elemanlı kümenin tüm alt kümeleri verilen şartı sağlayacaktır.)

olduğu görülür

Soruda A_{10} değeri isteniyor.

Bu indirgemeli dizinin terimleri, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773 olarak gider.

Sonuç olarak soruda istenen $A_{10} = 773$ olarak hesaplanır.

Not: Bu problemin çözümündeki fikir, n elemanlı kümenin ardışık k tane tamsayı içermeyen alt kümelerinin sayısının bulunması için de uygulanabilir.