XVII. ULUSAL ANTALYA
MATEMATİK OLİMPİYATI
İKİNCİ AŞAMA SINAV SORULARI

LİSE 2-3 | 5 Mayıs 2012 | LİSE 2-3

1. $a_0 > 1$, $a_1 > 1$ ve $a_2 > 1$ olmak üzere, (a_n) dizisi aşağıdaki formülle tanımlanmıştır :

$$a_{n+3} = \frac{1}{a_n}\left(1 + a_{n+1} + a_{n+2}\right), \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Her $n \geq 0$ için $a_{n+8} = a_n$ olduğunu kanıtlayınız.

2. $x > y \geq 0$ olmak üzere, (x, y) ikilisi $\sqrt{xy} = \dfrac{x+y}{x-y}$ eşitliğini sağlasın. $f(x, y) = x + y$ toplamının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

3. Herhangi $n > 2$ tamsayısı verilsin. Öyle $m < n^2$ pozitif tamsayısı vardır ki, $x^n + y^n - m$ ifadesi, x ve y'nin hiç bir tam değerinde n^2 ye tam bölünmez; kanıtlayınız.

4. $x \geq y \geq z \geq 0$ ve $x + y + z = 6$ ise,

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 \leq 27$$

olduğunu gösteriniz.

5. ABC dar açılı bir üçgen ve $|AC| \neq |BC|$ olsun. D ve E, sırasıyla $[BC]$ ve $[AC]$ kenarlarının üzerinde alınan ve ABDE kirişler dörtgeni olacak şekildeki noktalardır. $[AD] \cap [BE] = \{P\}$ olsun. $CP \perp [AB]$ ise, P noktasının ABC üçgeninin diklik merkezi olduğunu gösteriniz.

NOT : i) Size asıl çözümlerin olacağı 5 kağıt ve karalamaları yapacağınız 5 kağıt verilmiştir. Karalamalar sizde kalacaktır. Lütfen, asıl çözümü yapacağınız kağıtların üzerine adınızı, soyadınızı ve sınıfınızı yazınız.
ii) Asıl çözümlerinizi anlaşılır ve açıklayıcı bir biçimde yazınız. Bir kağıtta, 1'den fazla çözüm yapmayınız. Ek kağıt isteyebilirsiniz.
iii) Sınav süresi 3.5 saattir.

BAŞARILAR