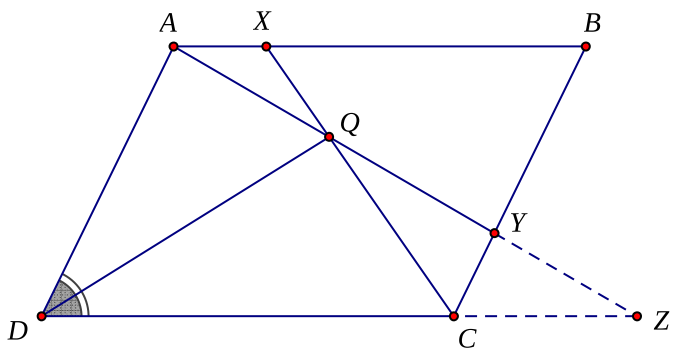
ÜÇGENİN İÇ MERKEZİ NEDEN MEDİAL ÜÇGENİNİN NAGEL NOKTASI OLUR? (*L. Gökçe*)

Bu yazıyı hazırlamamızın bütün amacı yazımızın sonundaki TÜBİTAK – 1994 ikinci aşama sınavında sorulan bir soruya detaylarıyla cevap verebilmektir. Yazının başlığını oluşturan soruya cevap olarak '*çünkü iç merkez, ağırlık merkezi ve Nagel noktası doğrusaldır ve Nagel doğrusu olarak bilinen doğrunun üzerinde bulunurlar*' dersek aslında hiç bir şey söylememiş oluruz. Zaten bu üç noktanın doğrusal olduğu bir şekilde ispatlandıktan sonra geometriciler: '*buna biz bir isim koyalım ve mesela 'Nagel doğrusu' gibi bir şey hiç de fena bir isim olmaz*' demişler. Hatta başka öneri getiren de olmamış, '*en iyisi direkt olarak biz bu doğuya 'Nagel doğrusu' diyelim ve geçelim*' demişler. Yani başlıktaki sorunun cevabı öyle iki satırlık bir şey değil. Hele hele, '*açıklamaya gerek bile yok*, *zaten aşikardır*' denecek türden bir şey hiç değil. Çözümü kısa değil, ama çok uzun da değil.

Şimdi ispatımızda kullanacağımız bir problemle başlayalım:

Problem 1: *ABCD* paralelkenarının [*AB*], [*BC*] kenarları üzerinden sırasıyla *X*, *Y* noktalarını $|AX|=|CY|$ olacak şekilde alalım. *AY* ile *CX* doğrularının kesişimi *Q* olmak üzere $\angle ADQ=\angle CDQ$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: *AY* ile *DC* doğrularının kesişimi *Z* olsun. O zaman *ADZ* üçgeninde *DQ* nun iç açıortay olduğunu ispat etmemiz gerekiyor. Bunun için de iç açıortay teoremi olarak bildiğimiz $\frac{|AD|}{|DZ|}=\frac{|AQ|}{|ZQ|}$ eşitliğinin sağlandığını göstermemiz gerekiyor. Burada $\frac{|AQ|}{|ZQ|}$ oranının yerine buna eşit olan başka bir şey yazabilir miyiz diye bakarsak $AXQ \sim ZCQ$ olduğundan $\frac{|AQ|}{|ZQ|}=\frac{|AX|}{|ZC|}$ eşitliğini görürüz. O halde $\frac{|AD|}{|DZ|}=\frac{|AX|}{|ZC|}$ eşitliğini gösterebilirsek problem çözülmüş olur. Şimdi bu eşitlikte $|AX|$ in yerine yazabileceğimiz bir şeyler var mı diye bakarsak, problemin kendisi $|AX|=|CY|$ olduğunu vermişti. Yani $\frac{|AD|}{|DZ|}=\frac{|CY|}{|ZC|}$ olduğunu göstermeliyiz. Hımm … acaba bu $\frac{|AD|}{|DZ|}=\frac{|YC|}{|CZ|}$ eşitliği sağlanır mı? Bu düpedüz $ADZ \sim YCZ$ benzerliğidir.

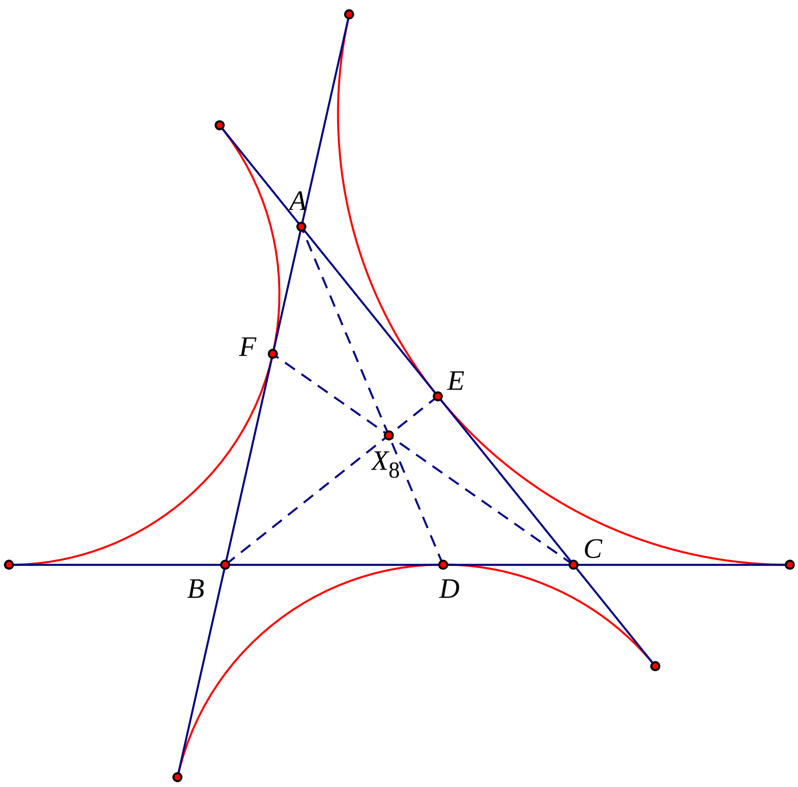


Şimdi Nagel noktası diye bilinen özel noktayı tanıtıcı bir problem çözelim.

Problem 2: Herhangi bir ABC üçgenini dış teğet çemberleri $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarlarına sırasıyla D, E, F noktalarında teğet olsunlar. Bu durumda AD, BE, CF doğrularının üçü birden aynı noktadan geçerler, ispatlayınız.

AD, BE, CF doğrularının üçünün de geçtiği bu ortak noktaya *Nagel noktası* denir.

Çözüm:



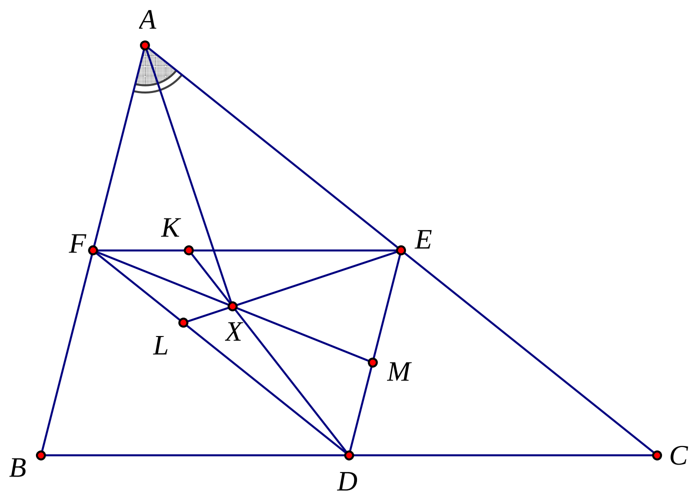
ABC üçgeninin kenar uzunlukları *a*, *b*, *c* ve yarı çevresi *s* olmak üzere $|CE| = |BF| = s - a$, $|AF| = |CD| = s - b$, $|AE| = |BD| = s - c$ dir. *AD*, *BE*, *CF* doğrularının üçünün de aynı noktadan geçtiğini göstermek için Ceva teoremi olarak bilinen $\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|CA|} = 1$ eşitliğinin sağlandığını göstermek gerekli ve yeterlidir. $\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|CA|}$ çarpımının sonunun 1 olduğu bu defa gerçekten de aşikardır.

AD, *BE*, *CF* doğrularının üçünün de geçtiği bu ortak nokta *Na* ile ya da *Clark Kimberling*'in numaralandırma sistemiyle X_8 ile gösterilir.

Şimdi sıra başlıktaki sorunun çözümüne geldi.

Problem 3: Herhangi bir üçgenin iç teğet çemberinin merkezinin, medial üçgenin Nagel noktası olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: *ABC* üçgeninin medial üçgeni *DEF* olsun. *DEF* üçgeninin dış teğet çemberlerinin [*EF*], [*FD*], [*DA*] kenarlarına değme noktaları sırasıyla *K*, *L*, *M* olsun. Bu durumda $|FK| = |DM|$, $|KE| = |DL|$, $|EM| = |LF|$ dir. Ayrıca *DK*, *EL*, *FM* doğrularının üçü de bir *X* noktasından geçer. Bu nokta *DEF* üçgeninin Nagel noktasıdır. *AFDE* paralelkenarında $|EM| = |LF|$ olduğundan Problem 1'e göre $\angle FAX = \angle EAX$ olur. *BDEF* paralelkenarında $|FK| = |DM|$ olduğundan $\angle ABX = \angle CBX$ olur. *CEFD* paralelkenarında $|KE| = |DL|$ olduğundan $\angle ECX = \angle DCX$ olur. Dolayısıyla *X* noktası *ABC* üçgeninde iç açıortayların kesim noktasıdır.

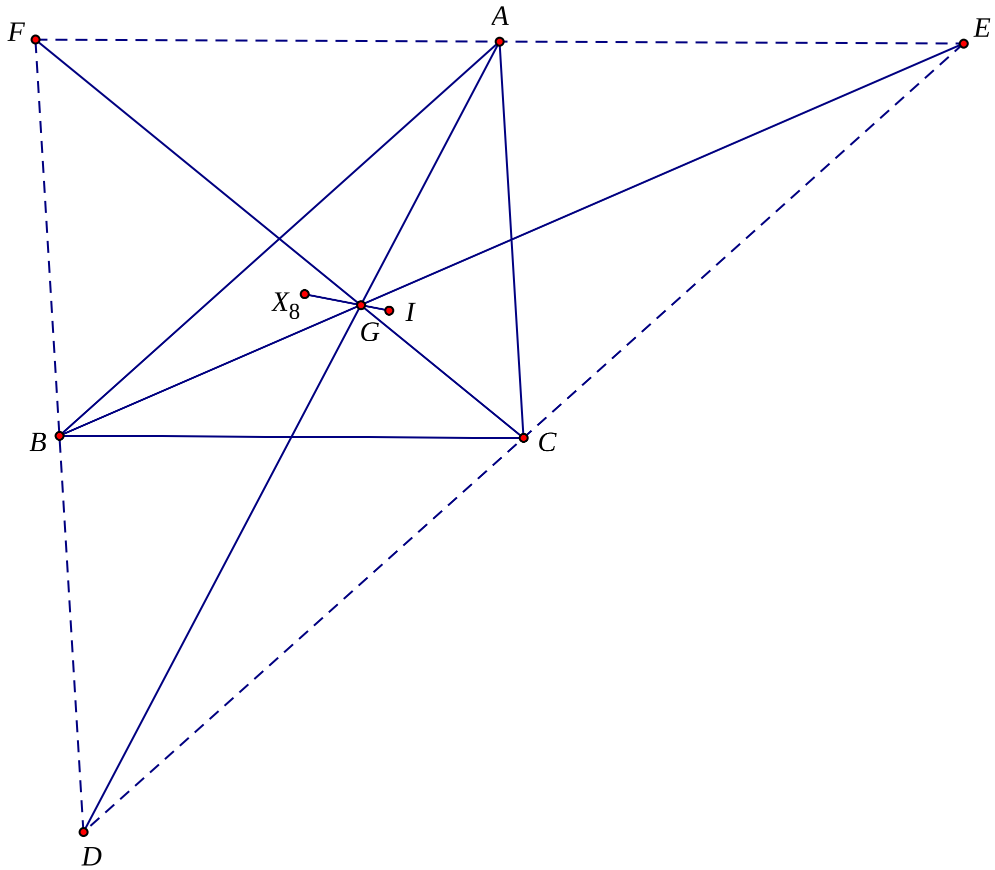


Şimdi de Nagel doğrusunun ne olduğunu söyleyen tanıtıcı problemi çözelim.

Problem 4: Herhangi bir üçgende iç teğet çember merkezi, ağırlık merkezi ve Nagel noktasının doğrusal olduğunu ispatlayınız.

Bu üç noktayı taşıyan doğruya *Nagel doğrusu* denir. Bunlara ilave olarak *Spieker Noktası* ismiyle bilinen ve medial üçgenin iç teğet çember merkezi olan nokta da Nagel doğrusu üzerinde bulunur.

Çözüm:



ABC üçgenini kendine medial üçgen kabul eden *DEF* üçgenini çizelim. Bu üçgene *ABC* nin *anti tamamlayıcı* (anticomplementary) *üçgeni* denir. Problem 3'den dolayı *ABC* nin Nagel noktası olan X_8 noktası, aynı zamanda *DEF* üçgeninin iç teğet çemberinin merkezidir. O zaman biz kendi kendimize bir de *ABC* nin iç teğet çember merkezi olan *I* noktasını çizelim. *DEF* ile *ABC* üçgenleri arasında $-\frac{1}{2}$ oranına sahip bir homoteti olduğunu iyi biliyoruz. Homoteti merkezi de *G* ağırlık merkezidir. Homotetinin önemli bir özelliği olarak aynı özelliğe sahip noktalar ve homoteti merkezi doğrusaldır. Dolayısıyla X_8 ile I homotetik eşlenik noktalar olup, X_8, I, G nokta üçlüsü doğrusaldır. Hatta homoteti oranından dolayı

$$|X_8G| = 2 \cdot |GI|$$

eşitliği de vardır.

X_{10} ile gösterilen ABC nin Spieker noktasının da Nagel doğrusu üzerinde olduğunu benzer biçimde kolaylıkla gösterebiliriz. X_{10} noktası aslında ABC nin medial üçgeninin iç merkeziydi. I noktası da ABC nin iç merkezidir. ABC ile medial üçgeni arasındaki $-\frac{1}{2}$ oranına sahip homotetiden dolayı X_{10}, I, G nokta üçlüsü doğrusal olur. Yine homoteti oranından dolayı

$$|IG| = 2 \cdot |GX_{10}|$$

olur.

Sonuç olarak X_8, X_{10}, I, G noktaları doğrusaldır.

Son olarak bir olimpiyat sorusu yazıp çözelim. Problemin b şıkkında direkt olarak Nagel doğrusunu sormuşlar. Aşağıda kısacık bir çözüm veriyor olmamız sizi yanıltmasın. O kısacık çözümü verebilmek için yukarıdaki tüm işlemleri yapmak gereklidir.

Problem 5 (*TÜBİTAK* 1994 – 2. *Aşama*)**:** ABC üçgeninin iç teğet çemberi [BC] ye D de, [AC] ye E de değiyor. [CB], [CA] üzerinden $|CK| = |BD|$ ve $|AE| = |CL|$ olacak şekilde sırasıyla K, L noktaları alınıyor. AK ve BL doğruları P de kesişiyor. [BC] nin orta noktası Q, ABC üçgeninin iç merkezi I ve ağırlık merkezi G ise,

a) $IQ \parallel AK$

b) $Alan(AIG) = Alan(QPG)$

olduğunu gösteriniz.

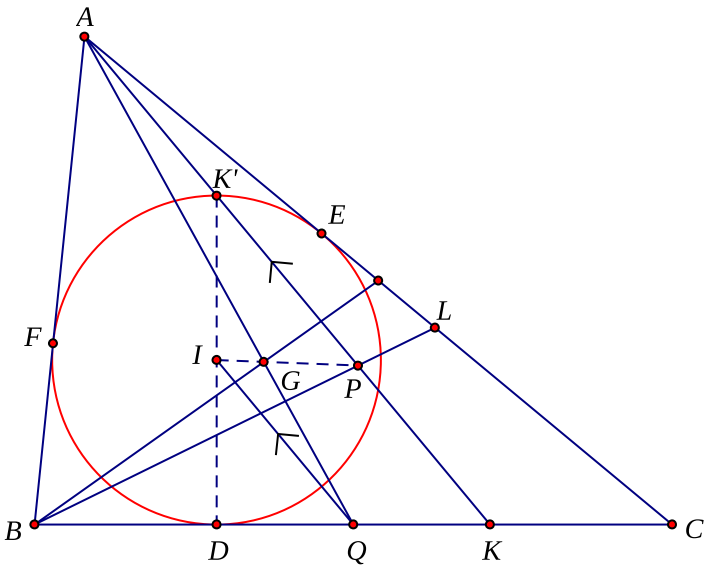
Çözüm:

a) $|CK| = |BD|$ olduğundan K noktası, ABC üçgeninin A noktasına göre dış teğet çemberinin [BC] kenarına değme noktasıdır. Benzer biçimde L noktası da, ABC üçgeninin B noktasına göre dış teğet çemberinin [AC] kenarına değme noktasıdır. Dolayısıyla AK ve BL doğrularının kesişimi olan P noktası, ABC üçgeninin *Nagel noktası*dır. İç teğet çemberin bir çapı

$[DK']$ olsun. İç teğet çemberi, A noktasına göre dış teğet çembere götüren homotetiyi göz önüne alalım. K ve K' noktaları bu homotetiye göre birbirinin eşleniğidir. Homotetinin önemli bir özelliği olarak homoteti merkezi ve eşlenik noktalar doğrusaldır. Dolayısıyla A, K ve K' noktaları doğrusal olur. $|DI| = |IK|$ ve $|DQ| = |QK|$ olduğundan $IQ \parallel AK$ paralelliği vardır. (Ayrıca $|KK'| = 2|IQ|$ eşitliği de vardır)

b) *Nagel doğrusu* olarak bilinen teoremi hatırlayalım: Bir üçgende iç merkez, ağırlık merkezi ve Nagel noktası doğrusaldır.

Bu özelliğe göre I, G, P doğrusal olur. $AIQP$ yamuğunda köşegenlerin kesim noktası G olduğundan $Alan(AIG) = Alan(QPG)$ eşitliği kolayca yazılabilir.



Kaynakça:

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=638057&sid=fc40e5ab450412e3ffa4ac261eaec944#p638057

http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/NagelLine.shtml

http://polymathematics.typepad.com/polymath/why-is-the-incenter-the-nagel-point-of-the-medial-triangle.html