

OLİMPİYATLARA HAZIRLIK İÇİN

CAUCHY – SCHWARZ EŞİTSİZLİĞİ PROBLEMLERİ

ve ÇÖZÜMLERİ (L. Gökçe)

Matematikteki ünlü eşitsizliklerden biri olan Cauchy – Schwarz eşitsizliği, olimpiyatlarda da önemli bir yere sahiptir. C – S eşitsizliği, klasik eşitsizlik ispatlarından başka, maksimum – minimum problemlerinin çözümünde ve denklem çözümlerinde de kullanılabilir.

C – S eşitsizliğinin ifadesi şöyledir:

x_1, x_2, \dots, x_n ve y_1, y_2, \dots, y_n reel sayıları için

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca eşitlik durumunun sağlanması ancak ve ancak $x_1 = k \cdot y_1$, $x_2 = k \cdot y_2$, ..., $x_n = k \cdot y_n$ olacak şekilde bir k sayısının olması ile mümkündür. Diğer bir deyişle x_1, x_2, \dots, x_n ve y_1, y_2, \dots, y_n sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$$

orantısı varsa, $|x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$ eşitliği geçerli olur.

Şimdi bu eşitsizliğin problemler üzerinde uygulamasını gösterelim.

Problem 1: $f(x) = 6 \cdot \sin x - 8 \cdot \cos x$ fonksiyonunun en büyük değerini ve en küçük değerini bulunuz.

Çözüm: $6, -8$ ve $\sin x, \cos x$ ikilileri için C – S eşitsizliğini uygularsak

$$|6 \cdot \sin x - 8 \cdot \cos x| \leq \sqrt{6^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \text{ yazılır. } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ olduğundan}$$

$$-10 \leq 6 \cdot \sin x - 8 \cdot \cos x \leq 10$$

elde edilir. Buradan $f_{\min} = -10$, $f_{\max} = 10$ bulunur. f nin bu değerleri almasını sağlayan x değerlerini bulmak istersek $\frac{6}{\sin x} = \frac{-8}{\cos x}$ orantısını çözmemiz gerekir. Buradan $\tan x = -\frac{3}{4}$ olup x açısının esas ölçüsü ya 2. bölgededir ya da 4. bölgededir. Bu durumda $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{-4}{5}$ veya $\sin x = \frac{-3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ olur.

Problem 2: x, y, z reel sayılar ve $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ise $3x - 12y + 4z$ ifadesinin en büyük ve en küçük değeri nedir?

Çözüm: x, y, z ve $3, -12, 4$ üçlüleri için C – S eşitsizliğini uygularsak

$$|3x - 12y + 4z| \leq \sqrt{3^2 + (-12)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

olur. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ eşitliğini kullanırsak $|3x - 12y + 4z| \leq 26$ olur. Buradan

$$-26 \leq 3x - 12y + 4z \leq 26$$

elde edilir. Dolayısıyla en büyük ve en küçük değerler sırasıyla $26, -26$ olur. $3x - 12y + 4z$ ifadesinin bu değerlere eşit olmasını sağlayan x, y, z reel sayılarını hesaplamak istersek

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{4} = k$$

orantısını sağlayan sayıları bulmamız gerekir. Buradan $x = 3k$, $y = -12k$, $z = 4k$ olup

$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow 9k^2 + 144k^2 + 16k^2 = 4$ yazılır. $k = \pm \frac{2}{13}$ olarak çözülür. Buna göre

$x = \frac{6}{13}$, $y = \frac{24}{13}$, $z = \frac{8}{13}$ ve $x = -\frac{6}{13}$, $y = -\frac{24}{13}$, $z = -\frac{8}{13}$ için aranan en büyük ve en küçük değerler elde edilir.

Problem 3: $x, y, z > 0$ ve $4x + 49y + 25z = 2$ olsun. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ifadesinin en küçük değeri nedir?

Çözüm: $\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{z}}$ ve $2\sqrt{x}, 7\sqrt{y}, 5\sqrt{z}$ üçlüleri için C – S eşitsizliğini uygularsak

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \cdot (4x + 49y + 25z) \geq \left(2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + 7\sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + 5\sqrt{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2$$

olup $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \cdot 2 \geq (2+7+5)^2$ yazılır. Buradan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 98$ elde edilir.

Problem 4: $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 1 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} &= n^2 \end{aligned} \right\}$$

denklemlerini sağlayan tüm (x_1, x_2, \dots, x_n) çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}$ ve $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n}$ n - lileri için C - S eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x_1}} \cdot \sqrt{x_1} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} \cdot \sqrt{x_2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \cdot \sqrt{x_n} \right|^2 \leq \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

olup buradan $\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n\text{-tane}} \leq n^2 \cdot 1$ yazılır. Sonuç olarak $n^2 \leq n^2$ elde edilir. Sağ taraf ile sol

tarafın birbirine eşit olması ancak ve ancak

$$\frac{\sqrt{x_1}}{\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)} = \frac{\sqrt{x_2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)} = \dots = \frac{\sqrt{x_n}}{\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)}$$

olması ile mümkündür. Buradan denklemin tek çözümünün $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$ olduğu anlaşılır.

NOT: Bu problemi aritmetik – harmonik ortalama eşitsizliğini kullanarak da çözebiliriz.

Problem 5: Aşağıdaki denklem sisteminin tüm (x_1, x_2, \dots, x_n) çözümlerini bulunuz.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} &= n^2 \\ \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} &= n^3 \end{aligned} \right\}$$

Çözüm 1: $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ ve $1, 1, \dots, 1$ (n - tane) sayıları için C - S eşitsizliğini uygularsak

$$\left| \frac{1}{x_1} \cdot 1 + \frac{1}{x_2} \cdot 1 + \dots + \frac{1}{x_n} \cdot 1 \right|^2 \leq \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} \right) \cdot \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n\text{-tane}}$$

olup $n^4 \leq n^3 \cdot n$ elde edilir. Sağ taraf ile sol tarafın birbirine eşit olması ancak ve ancak

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$ ile mümkündür.

Çözüm 2: $\frac{1}{x_i} = a_i$ değişken değiştirmesi yaparsak denklem sistemi

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= n^2 \\ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 &= n^3 \end{aligned} \right\}$$

şekline dönüşür. Aşağıdaki tam kare açılımlarını inceleyelim:

$$\begin{aligned} &(a_1 - n)^2 + (a_2 - n)^2 + \dots + (a_n - n)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - 2n \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (n^2 + n^2 + \dots + n^2) \\ &= n^3 - 2n \cdot n^2 + n^3 = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu ise ancak ve ancak $a_i = n$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olması ile mümkündür. Dolayısıyla $x_i = \frac{1}{n}$ dir.

Problem 6: Pozitif reel katsayılı 2. dereceden $P(x)$ polinomu verilsin. $P(xy)^2 \leq P(x^2) \cdot P(y^2)$ eşitsizliğini ispatlayınız. (Rusya - 1997)

Çözüm: $a, b, c > 0$ reel sayılar olmak üzere $P(x) = ax^2 + bx + c$ olsun. C – S eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} P(xy)^2 &= [ax^2y^2 + bxy + c]^2 \\ &= [(\sqrt{ax^2}) \cdot (\sqrt{ay^2}) + (\sqrt{bx}) (\sqrt{by}) + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c}]^2 \\ &\leq [(\sqrt{ax^2})^2 + (\sqrt{bx})^2 + \sqrt{c}^2] \cdot [(\sqrt{ay^2})^2 + (\sqrt{by})^2 + \sqrt{c}^2] \\ &= [ax^4 + bx^2 + c] \cdot [ay^4 + by^2 + c] \\ &= P(x^2) \cdot P(y^2) \end{aligned}$$

elde edilir.

NOT: Daha genel olarak pozitif reel katsayılı herhangi bir $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ polinomu için $P(xy)^2 \leq P(x^2) \cdot P(y^2)$ eşitsizliği vardır.

Problem 7: $\sum_{i=1}^n a_i = 96$, $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 144$, $\sum_{i=1}^n a_i^3 = 216$ denklemlerini sağlayan negatif olmayan tüm $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ sayılarını bulunuz. (İran – 1996)

Çözüm: Toplamlara sıfır ilave etmek ya da atmak etki etmeyeceğinden a_i sayılarını pozitif olarak alabiliriz. $\sqrt{a_i}$ ve $a_i \cdot \sqrt{a_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) n – lileri için C – S eşitsizliğini uygulayalım:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) \geq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2$$

olur. Fakat $96 \cdot 216 = 144^2$ olduğundan eşitlik durumu sağlanır. Bu ise ancak ve ancak

$$\frac{\sqrt{a_1}}{a_1 \cdot \sqrt{a_1}} = \frac{\sqrt{a_2}}{a_2 \cdot \sqrt{a_2}} = \dots = \frac{\sqrt{a_n}}{a_n \cdot \sqrt{a_n}}$$

orantısının olmasıyla mümkündür. Buradan $a_i = x$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olup

$$\left. \begin{aligned} nx &= 96 \\ nx^2 &= 144 \end{aligned} \right\}$$

elde edilir. Bu denklemlerden $x = \frac{3}{2}, n = 64$ olur.

Problem 8: $12.\sin x.\cos y - 16.\sin x.\sin y + 21.\cos x$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm: $12, -16, 21$ ve $\sin x.\cos y, \sin x.\sin y, \cos x$ üçlüleri için C – S eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned} & |12.\sin x.\cos y - 16.\sin x.\sin y + 21.\cos x| \\ & \leq \sqrt{12^2 + 16^2 + 21^2} \cdot \sqrt{\sin^2 x.\cos^2 y + \sin^2 x.\sin^2 y + \cos^2 x} \end{aligned}$$

olur. $(12^2 + 16^2) + 21^2 = 20^2 + 21^2 = 29^2$ ve

$$(\sin^2 x.\cos^2 y + \sin^2 x.\sin^2 y) + \cos^2 x = \sin^2 x(\cos^2 y + \sin^2 y) + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

olduğundan $|12.\sin x.\cos y - 16.\sin x.\sin y + 21.\cos x| \leq 29$ elde edilir. Aranılan en büyük değer 29 olur.

Problem 9: $a, b, c, d, e, f > 0$ reel sayıları için $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = 1$ ise $\sqrt{b+d+f} \geq \sqrt{a} + \sqrt{c} + \sqrt{e}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sqrt{b}, \sqrt{d}, \sqrt{e}$ ve $\sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{c}{d}}, \sqrt{\frac{e}{f}}$ üçlüleri için C – S eşitsizliğini uygularsak

$$(b+d+f)\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) \geq \left(\sqrt{b}.\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{d}.\sqrt{\frac{c}{d}} + \sqrt{e}.\sqrt{\frac{e}{f}}\right)^2$$

olup buradan $\sqrt{b+d+f} \geq \sqrt{a} + \sqrt{c} + \sqrt{e}$ elde edilir.

Problem 10: $x, y, z > 1$ ve $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ ise $\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$ olduğunu ispatlayınız. (İran – 1998)

Çözüm: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \Rightarrow \frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 1$ yazılabilir. $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ ve

$\sqrt{\frac{x-1}{x}}, \sqrt{\frac{y-1}{y}}, \sqrt{\frac{z-1}{z}}$ üçlüleri için C – S eşitsizliğini uygularsak

$$(x+y+z) \cdot \left(\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} \right) \geq \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x}} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{y-1}{y}} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{\frac{z-1}{z}} \right)^2$$

olur. Buradan $\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$ elde edilir.

Problem 11: $a, b, c > 0$ reel sayıları için $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. (Nesbitt Eşitsizliği)

Çözüm:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq \frac{9}{2} \text{ dir. Bu son eşitsizliği göstermek yeterlidir.}$$

C – S eşitsizliğinden

$$((b+c) + (c+a) + (a+b)) \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 3^2$$

olduğundan verilen eşitsizlik doğrudur.

Problem 12: x_1, x_2, \dots, x_n ve y_1, y_2, \dots, y_n pozitif reel sayıları için

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Okuyucuya bırakılmıştır.

Problem 13: x_1, x_2, \dots, x_n ve y_1, y_2, \dots, y_n pozitif reel sayıları için

$$\frac{x_1}{y_1^2} + \frac{x_2}{y_2^2} + \dots + \frac{x_n}{y_n^2} \geq \frac{1}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \dots + \frac{x_n}{y_n} \right)^2$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Okuyucuya bırakılmıştır.

Problem 14: x_1, x_2, \dots, x_n ve y_1, y_2, \dots, y_n pozitif reel sayıları için

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \dots + \frac{x_n}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}$$

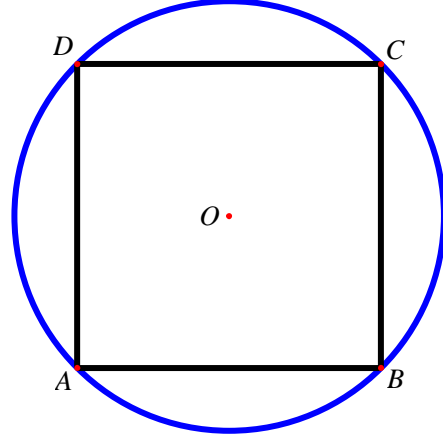
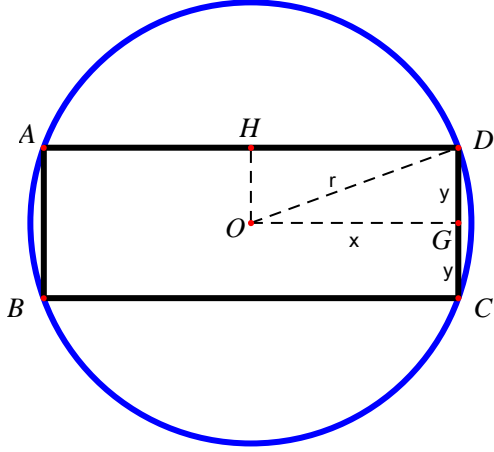
olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Okuyucuya bırakılmıştır.

Problem 15: r yarıçaplı çemberin içine çizilen bir dikdörtgenin çevresinin en fazla $4\sqrt{2}r$ olabileceğini ispatlayınız.

Çözüm: O merkezli çemberin içine $ABCD$ dikdörtgenini çizelim. $|BC| = 2x$ ve $|AB| = 2y$ ile gösterelim. O noktasından $[DC]$, $[AD]$ kenarlarına çizilen dikme ayakları sırasıyla G , H olsun. $|OG| = x$ ve $|GD| = y$ olduğundan $x^2 + y^2 = r^2$ elde edilir. Biz $\text{Çevre}(ABCD) = 4(x + y)$ ifadesinin en büyük değerini bulmak istiyoruz. C – S eşitsizliğinden

$|x + y| = |1 \cdot x + 1 \cdot y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1^2 + 1^2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ olup $x + y \leq 8$ elde edilir. Eşitlik durumu sadece $x = y = 4$ iken vardır. Yani $ABCD$ dikdörtgeni bir kare olmalıdır.



Problem 16: $x, y, z > 0$ reel sayılar olmak üzere

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 49y + 25z = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 98 \end{array} \right\} \text{denklem sistemini sağlayan tüm } (x, y, z) \text{ üçlülerini bulunuz.}$$

Çözüm: $(2\sqrt{x}, 7\sqrt{y}, 5\sqrt{z})$ ve $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ üçlülere için Cauchy – Schwarz eşitsizliğini

uygulayalım: $\left(2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + 7\sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + 5\sqrt{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \leq (4x + 49y + 25z) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ olur.

$4x + 49y + 25z = 2$ ve $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 98$ değerlerini bu eşitsizlikte kullanırsak

$(2 + 7 + 5)^2 \leq 2 \cdot 98 \Rightarrow 196 \leq 196$ elde edilir. C – S eşitsizliği uygulandığında eşitlik durumu ancak ve ancak

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{x}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)}{7\sqrt{y}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)}{5\sqrt{z}}$$

orantısı varken sağlanır. Buradan $2x = 7y = 5z$ elde edilir. $4x + 49y + 25z = 2$ olduğundan

$4x + 7 \cdot (7y) + 5(5z) = 2 \Rightarrow 4x + 7 \cdot 2x + 5 \cdot 2x = 2$ olup $x = \frac{1}{14}$ elde edilir. Buna göre

$y = \frac{1}{49}, z = \frac{1}{35}$ olur. Denklem sisteminin tek çözüm üçlüsü $\left(\frac{1}{14}, \frac{1}{49}, \frac{1}{35}\right)$ dir.

Problem 17: α, β, θ pozitif reel sayıları için $\alpha + \beta + \theta = \pi$ eşitliği sağlandığına göre aşağıdaki eşitsizlikleri ispatlayınız. Ayrıca eşitlik durumunun ne zaman sağlanacağını belirleyiniz

$$(a) \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \tan^2 \frac{\beta}{2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \geq 1$$

$$(b) \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Çözüm: $\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2}}$ dir. Ayrıca $\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \cot \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}}$

olduğundan $\frac{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}}$ yazılır. Çapraz çarpım yapılarak

$$\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} = 1 \dots (1)$$

elde edilir.

(a) Cauchy – Schwarz eşitsizliğinden

$$\left(\tan^2 \frac{\alpha}{2} + \tan^2 \frac{\beta}{2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \cdot \left(\tan^2 \frac{\beta}{2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \geq \left(\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} \right)^2$$

olup (1) eşitliğinin yardımıyla $\tan^2 \frac{\alpha}{2} + \tan^2 \frac{\beta}{2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \geq 1$ elde edilir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $\alpha = \beta = \theta = 60^\circ$ olması halinde gerçekleşir.

(b) Aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} \right) \cdot \left(\tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} \right) \cdot \left(\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} \right)}$$

olup (1) eşitliği yardımıyla $\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$ elde edilir. Burada da eşitlik durumu ancak ve ancak $\alpha = \beta = \theta = 60^\circ$ olması halinde sağlanır.

Problem 18: a, b, c gerçel sayılar olmak üzere aşağıdaki denklem sistemini sağlayan en büyük ve en küçük c değerlerinin toplamı kaçtır?

$$\left. \begin{array}{l} a+b+c=6 \\ ab+ac+bc=0 \end{array} \right\}$$

Çözüm: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$ özdeşliğinden $a^2 + b^2 + c^2 = 36$ olup $a^2 + b^2 = 36 - c^2$ yazılır. Buna göre C – S eşitsizliğinden

$(6-c)^2 = (a+b)^2 \leq 2.(a^2 + b^2) = 2.(36 - c^2)$ dir. $(6-c)^2 \leq 2.(36 - c^2)$ ikinci dereceden eşitsizliği düzenlenirse $c^2 - 4c - 12 \leq 0$ olup $-2 \leq c \leq 6$ elde edilir. c nin alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin toplamı $-2+6=4$ olur.

$c = -2$ ve $c = 6$ durumlarının irdelenmesi okuyucuya bırakılmıştır.

Problem 19: a, b, c, d gerçel sayılar olmak üzere aşağıdaki denklem sistemini sağlayan en büyük ve en küçük d değerlerinin çarpımı kaçtır?

$$\left. \begin{array}{l} a+b+c+d=4 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=0 \end{array} \right\}$$

Çözüm: $a+b+c+d=4 \Rightarrow a+b+c=4-d$ ve

$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$ özdeşliğinden

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 16 - d^2$ dir. Cauchy – Schwarz eşitsizliğinden:

$$(4-d)^2 = (a+b+c)^2 \leq 3.(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow (4-d)^2 \leq 3.(16-d^2)$$

$$\Rightarrow d^2 - 8d + 16 \leq 48 - 3d^2$$

$$\Rightarrow d^2 - 2d - 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow -2 \leq d \leq 4$$

elde edilir. Acaba $d = 4$ ve $d = -2$ olmasını sağlayan a, b, c gerçel sayıları var mıdır? Bunu da araştırmadıkça çözümümüzden emin olamayız! C – S eşitsizliğinde eşitlik durumunun sağlanması ancak ve ancak $a = b = c$ ile mümkündür. $a = b = c = 0$ için $d = 4$ olmaktadır. $a = b = c = 2$ için $d = -2$ olmaktadır. d nin bu en büyük ve en küçük değerlerinin çarpımı $(-2).4 = -8$ dir.

Problem 20: $a, b, c, x, y, z \geq 0$ ve $x + y + z = 1$ ise

$$ax + by + cz + 2\sqrt{(ab + ac + bc)(xy + yz + zx)} \leq a + b + c$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: İki defa C – S eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned} \text{Sol taraf} &\leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{2 \cdot (ab + ac + bc)} \cdot \sqrt{2 \cdot (xy + yz + zx)} \\ &\leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc)} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot (xy + yz + zx)} \\ &= (a + b + c) \cdot \underbrace{(x + y + z)}_1 = a + b + c \end{aligned}$$

bulunur.

Problem 21: Kenar uzunlukları a, b, c , yükseklikleri h_a, h_b, h_c , alanı da S olan herhangi bir üçgende $(a + b + c)(h_a + h_b + h_c) \geq 18S$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ ve $(\sqrt{h_a}, \sqrt{h_b}, \sqrt{h_c})$ üçlülere için C – S eşitsizliğini uygulayalım.

$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{h_a} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{h_b} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{h_c})^2 \leq (a + b + c)(h_a + h_b + h_c)$ olur. $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2S$ olduğundan $(a + b + c)(h_a + h_b + h_c) \geq 18S$ elde edilir.

Problem 22: Kenar uzunlukları a, b, c , yükseklikleri h_a, h_b, h_c , çevresi P , alanı da S olan

herhangi bir üçgende $\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \geq \frac{P^2}{2S}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Problem 14 deki özelliğe göre $\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \geq \frac{(a + b + c)^2}{(a \cdot h_a + b \cdot h_b + c \cdot h_c)}$ olmaktadır. Bu

ise $\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \geq \frac{P^2}{2S}$ eşitsizliğine denktir.

Problem 23: $x + y = 2(\sqrt{x+3} + \sqrt{y+4})$ eşitliğini sağlayan reel x ve y sayıları için $\sqrt{x+3} + \sqrt{y+4}$ toplamının alabileceği en büyük değer nedir? (Akdeniz – 2007)

Çözüm: $(1,1)$ ve $(\sqrt{x+3}, \sqrt{y+4})$ ikilileri için C – S eşitsizliğini uygulayalım.

$(1 \cdot \sqrt{x+3} + 1 \cdot \sqrt{y+4})^2 \leq (1+1)(x+y+7)$ olur. $\sqrt{x+3} + \sqrt{y+4} = a$ dersek $x+y = 2a$ olup eşitsizliğimiz $a^2 \leq 4a + 14$ şekline dönüşür. Buradan a nın en büyük değerini belirleyelim. $a^2 - 4a + 4 \leq 14 + 4$ olup $(a-2)^2 \leq 18$ eşitsizliğinden $a \leq 2 + 3\sqrt{2}$ bulunur.

Problem 24: $x, y, z > 0$ reel sayılar ve $xyz = 1$ ise $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

Çözüm: Problem 12 deki özelliği kullanırsak

$$T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} \text{ elde edilir. Aritmetik – geometrik}$$

ortalama eşitsizliğinden de $x+y+z \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} = 3$ yazabiliriz. Böylece $T \geq \frac{3}{2}$ bulunur. Eşitlik durumu $x = y = z = 1$ için sağlanır.

Problem 25: $x, y, z > 0$ reel sayılar ise $\frac{x}{2y+5z} + \frac{y}{2z+5x} + \frac{z}{2x+5y}$ ifadesi en az kaç olur?

Çözüm: Problem 12 deki özelliği uygulayabilmek için kesirlerin payları tam kare olmalıdır.

$$\text{Buna göre } T = \frac{x}{2y+5z} + \frac{y}{2z+5x} + \frac{z}{2x+5y} = \frac{x^2}{2xy+5xz} + \frac{y^2}{2yz+5xy} + \frac{z^2}{2xz+5yz} \text{ biçiminde}$$

yazalım. Buradan $T \geq \frac{(x+y+z)^2}{7(xy+yz+zx)}$ elde edilir. Son olarak iyi bilinen

$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ eşitsizliğini uygularsak $T \geq \frac{3}{7}$ bulunur. Eşitlik durumu

$x = y = z$ iken sağlanır.

Problem 26: $x, y, z > 0$ reel sayılar ise $\frac{x}{2x+3y+4z} + \frac{y}{2y+3z+4x} + \frac{z}{2z+3x+4y}$ ifadesinin minimum değeri kaçtır?

Çözüm: Öncelikle $x = y = z$ için minimum değerin $\frac{1}{3}$ olduğunu tahmin edebiliriz. Şimdi bu tahminimizi ispatlayalım. Problem 12 deki özelliği uygulayabilmek için kesirlerin paylarını tam kare yapalım.

$$\begin{aligned} T &= \frac{x}{2x+3y+4z} + \frac{y}{2y+3z+4x} + \frac{z}{2z+3x+4y} \\ &= \frac{x^2}{2x^2+3xy+4xz} + \frac{y^2}{2y^2+3yz+4xy} + \frac{z^2}{2z^2+3xz+4yz} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+7(xy+yz+zx)} \text{ yazılır. Artık } \frac{(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+7(xy+yz+zx)} \geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

eşitsizliğini ispat etmek yeterlidir.

$$\frac{(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+7(xy+yz+zx)} \geq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y+z)^2 \geq 2(x^2+y^2+z^2)+7(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

olup bu son eşitsizlik doğrudur. Sonuç olarak $T \geq \frac{1}{3}$ olur.

Problem 27: $a, b, c > 0$ reel sayılar ve $abc = 1$ ise $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ olduğunu ispatlayınız. (IMO – 1995)

Çözüm: $T = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ şeklinde yazalım

$$\text{Problem 12 deki özellikten dolayı } T \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

olur. Şimdi aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliği uygularsak $T \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} = \frac{3}{2}$ elde edilir. Eşitlik durumu da $a = b = c = 1$ iken sağlanır.