

ORTALAMA EŞİTSİZLİKLERİNE GİRİŞ (L. Gökçe)

Olimpiyat problemlerinin çözümünde eşitsizlik teorisi önemli bir yer tutar. Bazen bir maksimum – minimum değer probleminde, bazen bir geometrik eşitsizlik kanıtında, bazen de bir denklem çözümünde eşitsizliklerden faydalanılabilmektedir. Bu yazımızda, sıkça karşılaşılan ve iyi bilinmesi gereken eşitsizliklerden birisini, '*Ortalama Eşitsizlikleri*'ni ele alacağız.

a_1, a_2, \dots, a_n ; n tane pozitif reel sayı olmak üzere

Aritmetik Ortalama = $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, Geometrik Ortalama = $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$,

Harmonik Ortalama = $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ ve Karesel Ortalama = $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ şeklinde tanımlanır.

Ortalama Eşitsizlikleri Teoremi: Ortalamalar arasında $H \leq G \leq A \leq K$ eşitsizliği vardır. Eşitlik durumu ise ancak $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ olduğunda geçerlidir.

UYARI: Problem çözümlerinde $H = G = A = K$ eşitlik durumunun analiz edilmesine önem verilmelidir. Bu çok önemli noktaya vurgu yapmak amacıyla aşağıdaki problemlerin birçoğunda eşitlik durumunun ne zaman sağlanacağı da irdelenmiştir.

Problem 1: $n = 3$ için $H \leq G \leq A \leq K$ ortalama eşitsizliklerini ispatlayınız.

Çözüm:

(a) Öncelikle $A \leq K$ eşitsizliğini gösterelim. $a, b, c > 0$ sayılarını göz önüne alalım.

$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ olduğunu ispatlamalıyız. Bu eşitsizliğin doğru olduğunu kabul ederek her iki tarafın karesini alarak başlayalım:

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{9} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) \leq 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$

olur. Son eşitsizlik daima doğrudur ve eşitlik durumu ancak $a=b=c$ olduğunda sağlanır. O halde

$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ eşitsizliği de doğrudur, sağ ve sol tarafların eşit olması ancak ve ancak $a=b=c$ olması ile mümkündür.

(b) Şimdi de $G \leq A$, yani $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ cebirsel özdeşliğinden faydalanacağız.

Bu özdeşliğin doğruluğunu görmek için parantezleri açmak yeterli olacaktır. $x, y, z > 0$ olduğunu varsayalım. Bu halde $x+y+z > 0$ dır.

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = \frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2] \geq 0 \text{ dır ve eşitlik durumu ancak}$$

$x=y=z$ iken sağlanır. Dolayısıyla $x^3+y^3+z^3-3xyz \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz$ elde edilir. Burada

da eşitlik durumu $x=y=z$ iken sağlanır. $x=\sqrt[3]{a}, y=\sqrt[3]{b}, z=\sqrt[3]{c}$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \text{ elde edilir. Bu ifade de eşitlik durumu } \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c}$$

olduğunda, ya da buna denk olarak $a=b=c$ iken sağlanır.

(c) Son olarak $H \leq G$, yani $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}$ olduğunu göstereceğiz. (b) de $G \leq A$ olduğunu is-

patlamıştık. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ sayıları için aritmetik – geometrik ortalama eşitsizliğini uygulayalım:

$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}}$ olur. Bu eşitsizliği ters çevirirsek istenen eşitsizlik gösterilmiş olur. Burada da eşitlik durumu $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ olduğunda, ya da buna denk olarak $a = b = c$ iken vardır.

Ortalama eşitsizlikleri ile ilgili daha genel teoremler de vardır. α herhangi bir reel sayı ve a_1, a_2, \dots, a_n ; n tane pozitif reel sayı olmak üzere $M_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ sayısına a_1, a_2, \dots, a_n sayılarının α – inci mertebeden ortalaması denir. Geometrik ortalamayı $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = M_0$ şeklinde *sıfırıncı mertebeden ortalama* olarak isimlendirelim. Bu halde aşağıdaki teorem doğrudur:

Genelleştirilmiş Ortalama Eşitsizliği Teoremi: $\beta < \alpha$ iki reel sayı ise $M_\beta \leq M_\alpha$ dır. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ iken vardır.

NOT: Genelleştirilmiş ortalama eşitsizliğinin bir ispatı için P. P. Korowkin'in *Eşitsizlikler* isimli kitabına bakılabilir. Konumuzun başında ifade ettiğimiz $H \leq G \leq A \leq K$ ortalama eşitsizlikleri aslında $M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2$ özel halidir.

Problem 2: $x \neq 0$ ise $\frac{x^4 + 49}{x^2} \geq 14$ eşitsizliğini ispat ediniz.

Çözüm: $A \geq G$ eşitsizliğinden $\frac{x^4 + 49}{x^2} = x^2 + \frac{49}{x^2} \geq 2 \cdot \sqrt{x^2 \cdot \frac{49}{x^2}} = 14$ olur.

Problem 3: $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $A \geq G$ eşitsizliğinden $\frac{(x^2 + 1) + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2 \cdot \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}} = 2$ olur.

Problem 4: x, y, z, t, w pozitif sayılar ise $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{w} + \frac{w}{x} \geq 5$ olduğunu ispat ediniz.

Çözüm: $A \geq G$ eşitsizliğinden $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{w} + \frac{w}{x} \geq 5 \sqrt[5]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{t} \cdot \frac{t}{w} \cdot \frac{w}{x}} = 5$ elde edilir.

Problem 5: $a > 0$ ise $a^x + a^{-x} \geq 2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A \geq G$ eşitsizliğinden $a^x + a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x \cdot a^{-x}} = 2$ olur.

Problem 6: $\frac{x^2}{x^4 + 1} \leq \frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A \geq G$ eşitsizliğinden $\frac{x^4 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2$ olur. Eşitsizlikteki kesirlerin pay ve paydaları yer değiştirilirse $\frac{x^2}{x^4 + 1} \leq \frac{1}{2}$ elde edilir.

Problem 7: Üç dik kenarı toplamı 12 br olan dikdörtgenler prizmasının hacmi en fazla kaç br^3 tür?

Çözüm: Dikdörtgen prizmanın ayrıtlarını x, y, z ile gösterirsek $x + y + z = 12$ olur. Hacmi hesaplamak için xyz çarpımı bize gereklidir. $A \geq G$ eşitsizliğinden $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow 12 \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \leq 64$ olur. Dolayısıyla hacim en fazla 64 olabilir. Bu ise sadece $x = y = z = 4$ olduğunda, yani prizma bir küp iken gerçekleşir.

Problem 8: x, y, z pozitif sayılar ise $2x^2yz^4 + \frac{6}{z} + \frac{27y}{x} + \frac{4}{xy^2z^3}$ toplamının en küçük değeri nedir?

Çözüm: $A \geq G$ eşitsizliğinden

$$2x^2yz^4 + \frac{6}{z} + \frac{27y}{x} + \frac{4}{xy^2z^3} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{2x^2yz^4 \cdot \frac{6}{z} \cdot \frac{27y}{x} \cdot \frac{4}{xy^2z^3}} = 4 \cdot \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = 24 \text{ olur. Eşitlik durumu}$$

$2x^2yz^4 = \frac{6}{z} = \frac{27y}{x} = \frac{4}{xy^2z^3}$ iken vardır. (Logaritma yardımıyla bu denklemleri sağlayan x, y, z sayılarını bulmak mümkündür). Dolayısıyla en küçük değer 24 tür.

Problem 9: $n \geq 2$ olmak üzere $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ eşitsizliğini ispat ediniz.

Çözüm: $n! = 1.2.3 \dots (n-1).n$ olduğundan bu çarpım için $A \geq G$ eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{1+2+3+\dots+(n-1)+n}{n} \geq \sqrt[n]{1.2.3 \dots (n-1).n} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2n} \geq \sqrt[n]{n!} \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n! \text{ olur. Fakat aritmetik - geometrik ortalama eşitsizliği uygulanan } 1, 2, \dots, n \text{ sayıları birbirinden farklı olduğundan eşitlik durumu söz konusu değildir. Yani } n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \text{ kesin eşitsizliği vardır.}$$

Problem 10: x, y, z pozitif sayılar ise $\frac{\sqrt[3]{(8x+9y+10z)(9x+10y+8z)(10x+8y+9z)}}{x+y+z} \leq 9$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(8x+9y+10z), (9x+10y+8z), (10x+8y+9z)$ sayılarına $A \geq G$ eşitsizliğini uygularsak $(8x+9y+10z) + (9x+10y+8z) + (10x+8y+9z) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{(8x+9y+10z)(9x+10y+8z)(10x+8y+9z)}$ $\Rightarrow 27 \cdot (x+y+z) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{(8x+9y+10z)(9x+10y+8z)(10x+8y+9z)}$ olur. Bu ise göstermek istediğimiz eşitsizliğe denktir.

Eşitlik durumunun geçerli olup olmadığını inceleyelim. Ortalama eşitsizliğini uyguladığımız üç sayıyı eşitlersek $8x+9y+10z = 9x+10y+8z = 10x+8y+9z$ olur. Bu ise $x = y = z$ koşuluna denktir. Yani bu eşitlik halinin doğru olmasını sağlayan x, y, z pozitif sayıları vardır.

Problem 11: Dik kenarlarının uzunlukları a, b, c olan dikdörtgenler prizmasının cisim köşegeninin uzunluğu e ise $\sqrt{3} \cdot e \geq a+b+c$ olduğunu gösteriniz. Eşitlik hali ne zaman sağlanır?

Çözüm: Dikdörtgenler prizmasında $e^2 = a^2 + b^2 + c^2$ bağıntısının geçerli olduğunu biliyoruz. a, b, c sayıları için $A \leq K$ eşitsizliğini uygularsak $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{e^2}{3}}$ olup buradan $\sqrt{3}.e \geq a+b+c$ elde edilir. $\sqrt{3}.e = a+b+c$ eşitlik durumu ise sadece $a = b = c$ olduğunda, yani küpte geçerli olur.

Problem 12: $\angle C = 90^\circ$ ve dik kenarlarının uzunlukları a, b olan $\triangle ABC$ üçgeninde $a+b \leq \sqrt{2}.c$ olduğunu gösteriniz. Eşitlik ne zaman sağlanır?

Çözüm: Dik üçgende $c^2 = a^2 + b^2$ dir. a, b sayıları için $A \leq K$ eşitsizliğini uygularsak

$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{c^2}{2}}$ olup $a+b \leq \sqrt{2}.c$ elde edilir. $a+b = \sqrt{2}.c$ eşitliğinin var olması ancak $a = b$ durumunda mümkündür. Yani $\triangle ABC$, ikizkenar dik üçgen olmalıdır.

Problem 13: a, b, c pozitif sayılar ve $a+b+c = 6$ ise $\sqrt{(4a+b)^2 + (4b+c)^2 + (4c+a)^2}$ en az kaç olur?

Çözüm: $(4a+b), (4b+c), (4c+a)$ sayılarına $A \leq K$ eşitsizliğini uygularsak

$$\frac{(4a+b) + (4b+c) + (4c+a)}{3} \leq \sqrt{\frac{(4a+b)^2 + (4b+c)^2 + (4c+a)^2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{5(a+b+c)}{3} \leq \sqrt{\frac{(4a+b)^2 + (4b+c)^2 + (4c+a)^2}{3}}$$

olur. Burada $a+b+c = 6$ yazılırsa $\sqrt{(4a+b)^2 + (4b+c)^2 + (4c+a)^2} \geq 10\sqrt{3}$ elde edilir. İfadenin $10\sqrt{3}$ değerine eşit olabilmesi ancak ve ancak $4a+b = 4b+c = 4c+a$ durumunda mümkündür. Bu eşitlikten $a = b = c = 2$ olması gerektiği görülebilir.

Problem 14: a, b, c pozitif sayılar ve $5a+3b+2c = 2$ ise $\sqrt{(8a+c)^2 + 36.b^2 + (2a+3c)^2}$ en az kaç olur?

Çözüm: $(8a+c), 6b, (2a+3c)$ sayılarına $A \leq K$ eşitsizliğini uygularsak

$$\frac{(8a+c)+6b+(2a+3c)}{3} \leq \sqrt{\frac{(8a+c)^2+36b^2+(2a+3c)^2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{2(5a+3b+2c)}{3} \leq \sqrt{\frac{(8a+c)^2+36b^2+(2a+3c)^2}{3}}$$

olur. Burada $5a+3b+2c=2$ yazılırsa $\sqrt{(8a+c)^2+36b^2+(2a+3c)^2} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$ bulunur. İfadenin $\frac{4}{\sqrt{3}}$

değerine eşit olabilmesi ancak $8a+c=6b=2a+3c$ olmasıyla mümkündür. Buna göre $c=3a$,

$b=\frac{11a}{6}$ olmalıdır. Bu değerleri $5a+3b+2c=2$ denkleminde kullanırsak $5a+\frac{11a}{2}+6a=2$

$\Rightarrow a=\frac{4}{33}, b=\frac{2}{9}, c=\frac{4}{11}$ elde edilir. Bunlar verilen ifadenin en küçük olmasını sağlayan sayılardır.

Problem 15: $x, y, z, t, w > 0$ ve $x+y+z+t+w=30$ ise $x^2+y^2+z^2+t^2+w^2 \geq 180$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A \leq K$ eşitsizliğini uygularsak $\frac{x+y+z+t+w}{5} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2+t^2+w^2}{5}}$ olur.

$x+y+z+t+w=30$ yazılıp eşitsizliğin her iki tarafının karesi alınırsa $x^2+y^2+z^2+t^2+w^2 \geq 180$ elde edilir. İfadenin 180'e eşit olması ancak ve ancak $x=y=z=t=w=6$ durumunda mümkündür.

Problem 16: a_1, a_2, \dots, a_n ; n tane pozitif reel sayı ise $\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq n^2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a_1, a_2, \dots, a_n sayıları için $H \leq A$ eşitsizliği uygulanırsa $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

olur. Bu eşitsizlikte çapraz çarpım yapılırsa istenen sonuca ulaşılır. Eşitlik durumu ise sadece $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ olduğunda vardır.

Problem 17: $x, y, z, t > 0$ ve $x+y+z+t=3$ ise $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \geq \frac{16}{3}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $H \leq A$ eşitsizliği uygulanırsa $\frac{4}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}} \leq \frac{x+y+z+t}{4}$ olup burada $x+y+z+t=3$

yazılırsa istenen sonuca ulaşılır. Eşitlik durumu $x=y=z=t=\frac{3}{4}$ iken sağlanır.

Problem 18: x, y, z pozitif sayılar ve $x+y+z=2$ ise $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3y+z} + \frac{1}{3z+x}$ ifadesinin değeri en az kaçtır?

Çözüm: $H \leq A$ eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{3}{\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3y+z} + \frac{1}{3z+x}} \leq \frac{(3x+y) + (3y+z) + (3z+x)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3y+z} + \frac{1}{3z+x}} \leq \frac{4(x+y+z)}{3}$$

olur. Burada $x+y+z=2$ yazılırsa $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3y+z} + \frac{1}{3z+x} \geq \frac{9}{8}$ elde edilir. $x=y=z=\frac{2}{3}$ için eşitliğin sağlanacağı kolayca gösterilebilir.

Problem 19: x, y, z pozitif sayılar ve $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ise $\frac{4}{3x+5y} + \frac{4}{3y+5z} + \frac{4}{3z+5x}$ ifadesinin değeri en az kaçtır?

Çözüm: $(3x+5y), (3y+5z), (3z+5x)$ sayıları için $H \leq A$ eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{3}{\frac{1}{3x+5y} + \frac{1}{3y+5z} + \frac{1}{3z+5x}} \leq \frac{(3x+5y) + (3y+5z) + (3z+5x)}{3} = \frac{8(x+y+z)}{3} \dots (1)$$

elde edilir. Eşitlik durumu $3x+5y=3y+5z=3z+5x$ olduğunda, ya da buna denk olarak $x=y=z$

iken vardır. $A \leq K$ eşitsizliğinden $\frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ olup

$$x+y+z \leq 2\sqrt{3} \dots (2)$$

yazılır. Burada da eşitlik durumu yalnızca $x = y = z$ iken vardır. (1) ve (2) den

$$\frac{4}{3x+5y} + \frac{4}{3y+5z} + \frac{4}{3z+5x} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ elde edilir. Eşitlik durumu ancak } x = y = z = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ için sağlanır.}$$

Problem 20: Birbirine dik ayrıtların toplamı $a + b + c = 6\sqrt{3}$ olan dikdörtgenler prizmasında cisim köşegeni $e = 6$ ise tüm yüzey alanı kaçtır? $e = 5$ ve $e = 7$ iken yüzey alanı için ne söyleyebilirsiniz?

Çözüm:

(a) $e = 6$ durumunu inceleyelim. Problem 11'de $\sqrt{3}.e \geq a + b + c$ olduğunu ispatlamıştık. Bu durumda $6\sqrt{3} \geq 6\sqrt{3}$ olup eşitlik durumu sağlanmaktadır. Eşitlik durumu ancak ve ancak $a = b = c = 6$ iken sağlanır. Dolayısıyla bu prizma bir küp olup tüm yüzey alanı $6a^2 = 216$ olur.

(b) $e = 5$ durumunu inceleyelim. $\sqrt{3}.e \geq a + b + c$ eşitsizliğini göz önüne alırsak $5\sqrt{3} \geq 6\sqrt{3}$ çelişki si ortaya çıkmaktadır. O halde $e = 5$ olan bir dikdörtgenler prizması yoktur.

(c) $e = 7$ durumunu inceleyelim. $\sqrt{3}.e \geq a + b + c$ eşitsizliğini göz önüne alırsak $7\sqrt{3} \geq 6\sqrt{3}$ kesin eşitsizliği ortaya çıkmaktadır. Bu durumda a, b, c sayılarından en az ikisinin birbirinden farklı olduğunu ve

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 49 \\ a + b + c &= 6\sqrt{3} \end{aligned} \right\}$$

denklemlerinin sonsuz çoklukta (a, b, c) çözümü olduğunu söyleriz. Bununla birlikte

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \text{ özdeşliği yardımıyla tüm yüzey alanı sabit olarak } 2(ab + ac + bc) = 108 - 49 = 59 \text{ dur.}$$

Problem 21: a, b, c pozitif sayılar, $a + b + c = 15$ ve $\sqrt{(3a + 2b)^2 + (3b + 2c)^2 + (3c + 2a)^2} = 25\sqrt{3}$ ise

(a) a kaçtır?

$$(b) \sqrt{(3a + 2b)^2 + (3b + 2c)^2 + (3c + 2a)^2} = 25\sqrt{2}$$

(c) $\sqrt{(3a + 2b)^2 + (3b + 2c)^2 + (3c + 2a)^2} = 50$ iken a, b, c pozitif sayıları için ne söyleyebilirsiniz?

Çözüm:

(a) $(3a + 2b), (3b + 2c), (3c + 2a)$ sayılarına $A \leq K$ eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{(3a + 2b) + (3b + 2c) + (3c + 2a)}{3} \leq \sqrt{\frac{(3a + 2b)^2 + (3b + 2c)^2 + (3c + 2a)^2}{3}}$$
$$\Rightarrow \frac{5(a + b + c)}{3} \leq \sqrt{\frac{(3a + 2b)^2 + (3b + 2c)^2 + (3c + 2a)^2}{3}}$$
$$\Rightarrow \frac{5.15}{3} \leq \frac{25\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

olur. Son durumda eşitlik durumunun sağlandığını görüyoruz. Bu ise ancak ve ancak $3a + 2b = 3b + 2c = 3c + 2a$ olmasıyla mümkündür. Buradan $a = b = c = 5$ olduğunu görmek kolaydır.

(b) $\sqrt{(3a + 2b)^2 + (3b + 2c)^2 + (3c + 2a)^2} = 25\sqrt{2}$ verilirse $\frac{5.15}{3} \leq \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ çelişkisi elde edilir. Bu koşullara uygun a, b, c pozitif sayıları yoktur.

(c) $\sqrt{(3a + 2b)^2 + (3b + 2c)^2 + (3c + 2a)^2} = 50$ verilirse $\frac{5.15}{3} \leq \frac{50}{\sqrt{3}}$ kesin eşitsizliği elde edilir. Bu halde a, b, c pozitif sayılarından en az ikisi birbirinden farklı olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} (3a + 2b)^2 + (3b + 2c)^2 + (3c + 2a)^2 &= 2500 \\ a + b + c &= 15 \end{aligned} \right\}$$

denklem sistemini sağlayan sonsuz çoklukta a, b, c pozitif sayısı vardır.

Problem 22: $\angle C = 90^\circ$ olan $\triangle ABC$ dik üçgeninde hipotenüsün uzunluğu $c = 4$ ve $\text{Çevre}(ABC) = 4\sqrt{2} + 4$ ise

(a) $\text{Alan}(ABC)$ kaç olur?

(b) $c = 3$

(c) $c = 5$ iken $\text{Alan}(ABC)$ için ne söyleyebilirsiniz?

Çözüm:

(a) $c = 4$ durumunu inceleyelim. $\triangle ABC$ nin dik kenar uzunlukları a, b olsun.

$\text{Çevre}(ABC) = 4\sqrt{2} + 4$ olduğundan $a + b = 4\sqrt{2}$ dir. Problem 12'de $a + b \leq c\sqrt{2}$ olduğunu gös-

termiştik. Bu halde $4\sqrt{2} \leq 4\sqrt{2}$ eşitliği sağlanmaktadır. Eşitlik durumu sadece $a = b = 2\sqrt{2}$ iken sağlanacağından $Alan(ABC) = 4$ olur.

(b) $c = 3$ durumunu inceleyelim. $a + b \leq c\sqrt{2}$ eşitsizliğinden $4\sqrt{2} \leq 3\sqrt{2}$ çelişkisi oluşur. O halde $c = 3$ olan bir dik üçgen yoktur.

(c) $c = 5$ durumunu inceleyelim. $a + b \leq c\sqrt{2}$ eşitsizliğinden $4\sqrt{2} \leq 5\sqrt{2}$ kesin eşitsizliği oluşur. Bu halde

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 4\sqrt{2} - 1 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{array} \right\}$$

denklem sistemini elde ederiz. $Alan(ABC) = \frac{ab}{2}$ olduğundan ab çarpımını hesaplayalım.

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow ab = \frac{32 - 8\sqrt{2} + 1 - 25}{2} = 4 - 4\sqrt{2}$ dir. Bu değer negatif olduğundan verilere uygun bir dik üçgen yoktur.

Problem 23: $n! = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ denklemini sağlayan kaç tane negatif olmayan n tamsayısı vardır?

Çözüm: Problem 9'da $n \geq 2$ için eşitliğin sağ tarafındaki ifadenin, daima sol taraftaki ifadeden büyük olduğunu göstermiştik. $n = 0, n = 1$ değerlerinin her ikisi de denklemi sağladığından, iki tane n değeri vardır.

Problem 24: x, y, z pozitif sayılar, $3x + y + 2z = 2$ ve $\frac{3}{5x+2z} + \frac{1}{y} + \frac{3}{4z+4x} = \frac{9}{2}$ ise

(a) z kaçtır?

(b) $\frac{3}{5x+2z} + \frac{1}{y} + \frac{3}{4z+4x} = 4$

(c) $\frac{3}{5x+2z} + \frac{1}{y} + \frac{3}{4z+4x} = 5$ iken x, y, z pozitif sayıları için ne söyleyebilirsiniz?

Yol gösterme: $\frac{1}{y}$ yerine $\frac{3}{3y}$ koyduktan sonra $H \leq A$ eşitsizliğini uygulayınız.

Problem 25: $a, b, c > 0$ ve $a + b + c = 6$ ise $\frac{6-a}{a} \cdot \frac{6-b}{b} \cdot \frac{6-c}{c}$ çarpımının en küçük değeri kaçtır?

Çözüm: $A \geq G$ eşitsizliğinden

$$6-a = b+c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$6-b = a+c \geq 2\sqrt{ac}$$

$$6-c = a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

olup bu eşitsizlikleri taraf tarafa çarparsak $(6-a)(6-b)(6-c) \geq 2^3 \cdot abc$ olur. Eşitsizliğin her iki tarafını abc ile bölersek aranan en küçük değer 8 olduğu anlaşılır. $\frac{6-a}{a} \cdot \frac{6-b}{b} \cdot \frac{6-c}{c}$ çarpımı ancak $a = b = c = 2$ durumunda 8'e eşit olabilir.

Problem 26: $x, y, z > 0$ ve $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}$ ise $x \cdot y \cdot z \geq 216$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\frac{3}{x+3} = a$, $\frac{3}{y+3} = b$, $\frac{3}{z+3} = c$ dersek $x = \frac{3(1-a)}{a}$, $y = \frac{3(1-b)}{b}$, $z = \frac{3(1-c)}{c}$ ve

$a + b + c = \frac{3}{x+3} + \frac{3}{y+3} + \frac{3}{z+3} = 1$ olur. $A \geq G$ eşitsizliğinden

$$1-a = b+c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$1-b = a+c \geq 2\sqrt{ac}$$

$$1-c = a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

olur. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa çarparsak

$(1-a)(1-b)(1-c) \geq 2^3 \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ac} \cdot \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-b}{b} \cdot \frac{1-c}{c} \geq 8 \Rightarrow \frac{x}{3} \cdot \frac{y}{3} \cdot \frac{z}{3} \geq 8$ olup $x \cdot y \cdot z \geq 216$ elde edilir. $x \cdot y \cdot z$ çarpımının 216 ya eşit olabilmesi ancak $a = b = c$ durumunda, yani $x = y = z = 6$ olmasıyla mümkündür.

Problem 27: $x, y, z, t, v, w > 0$ ve $\frac{1}{x+8} + \frac{1}{y+8} + \frac{1}{z+8} + \frac{1}{t+8} + \frac{1}{v+8} + \frac{1}{w+8} = \frac{1}{8}$ ise

$\sqrt[6]{x \cdot y \cdot z \cdot t \cdot v \cdot w} \geq 40$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\frac{8}{x+8} = a, \frac{8}{y+8} = b, \frac{8}{z+8} = c, \frac{8}{t+8} = d, \frac{8}{v+8} = e, \frac{8}{w+8} = f$ değişken değiştirmesi yaparsak $x = \frac{8(1-a)}{a}, y = \frac{8(1-b)}{b}, \dots, w = \frac{8(1-f)}{f}$ ve $a+b+c+d+e+f=1$ olur. 6 defa $A \geq G$ eşitsizliği uygulayarak

$$\begin{aligned} 1-a &= b+c+d+e+f \geq 5\sqrt[5]{bcdef} \\ 1-b &= a+c+d+e+f \geq 5\sqrt[5]{acdef} \\ &\vdots \\ 1-f &= a+b+c+d+e \geq 5\sqrt[5]{abcde} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa çarparsak

$$(1-a)(1-b)\dots(1-f) \geq 5^6 \cdot abcdef \text{ olup } \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-b}{b} \dots \frac{1-f}{f} \geq 5^6 \text{ yazılır. Buradan } \frac{x}{8} \cdot \frac{y}{8} \dots \frac{w}{8} \geq 5^6$$

$$\Rightarrow \sqrt[6]{x \cdot y \cdot z \cdot t \cdot v \cdot w} \geq 40 \text{ bulunur.}$$

NOT: Bu problemdeki x, y, z, \dots değişkenlerinin sayısını artırarak ve 8 sabit sayısının yerine bir k değişkeni alarak daha genel bir ifade bulmayı deneyiniz.

Problem 28: $a, b > 0$ ise $a^3 + b^3 + 64 = 12ab$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $A \geq G$ eşitsizliğinden $\frac{a^3 + b^3 + 64}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot 64} \Rightarrow a^3 + b^3 + 64 \geq 12ab$ olur. Eşitlik durumunun sağlanması ancak ve ancak $a^3 = b^3 = 64$ ile mümkündür. Buradan denklemin tek çözümü $a = b = 4$ olarak bulunur.

Problem 29: $x^4 + y^4 + z^4 + 1 = 4xyz$ denklemini sağlayan kaç (x, y, z) reel sayı üçlüsü vardır? (UMO – 2006)

Çözüm: Verilen denklemden $xyz > 0$ olduğu anlaşılıyor. $A \geq G$ eşitsizliğinden $x^4 + y^4 + z^4 + 1 \geq 4\sqrt[4]{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4 \cdot 1} = 4 \cdot |xyz| = 4xyz$ olur. Eşitlik durumunun sağlanması ancak ve ancak $x^4 = y^4 = z^4 = 1$ olması ile mümkündür. $xyz > 0$ koşuluna uygun olarak tüm (x, y, z) üçlüleri $(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$ olup dört tanedir.

Problem 30: $x > 0$ ise $x^4 + \frac{128}{x}$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

Çözüm: $x^4 + \frac{128}{x} = x^4 + \frac{32}{x} + \frac{32}{x} + \frac{32}{x} + \frac{32}{x}$ şeklinde yazalım. $A \geq G$ eşitsizliğinden

$x^4 + \frac{32}{x} + \frac{32}{x} + \frac{32}{x} + \frac{32}{x} \geq 5 \sqrt[5]{x^4 \cdot \frac{32}{x} \cdot \frac{32}{x} \cdot \frac{32}{x} \cdot \frac{32}{x}} = 5 \sqrt[5]{2^{20}} = 80$ bulunur. Eşitlik durumu incelenirse

$x^4 = \frac{32}{x} = \frac{32}{x} = \frac{32}{x} = \frac{32}{x}$ olup buradan $x = 2$ bulunur. Yani $x^4 + \frac{128}{x}$ ifadesinin en küçük değeri olan 80'e eşit olmasını sağlayan sayı $x = 2$ değeridir.

Problem 31: x pozitif bir reel sayı olmak üzere $x^2 + \frac{1}{4x}$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz? (UMO – 2002)

- A) $\sqrt{3} - 1$ B) $\sqrt{5} - 1$ C) 1 D) $2\sqrt{2} - 2$ E) Hiçbiri

Çözüm: İfadenin en küçük değerini hesaplayalım. $x^2 + \frac{1}{4x} = x^2 + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x}$ şeklinde yazalım. $A \geq G$

eşitsizliğinden $x^2 + \frac{1}{4x} = x^2 + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x} \geq 3 \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{8x} \cdot \frac{1}{8x}} = \frac{3}{4}$ bulunur. O halde $x^2 + \frac{1}{4x}$ ifadesi $\frac{3}{4}$ den

daha küçük bir değeri alamaz. $\sqrt{3} - 1 < \frac{3}{4}$ olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten

$\sqrt{3} - 1 < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sqrt{3} < \frac{7}{4} \Leftrightarrow 16.3 < 49$ olur. Sonuç olarak $x^2 + \frac{1}{4x}$ ifadesi $\sqrt{3} - 1$ e eşit olamaz.

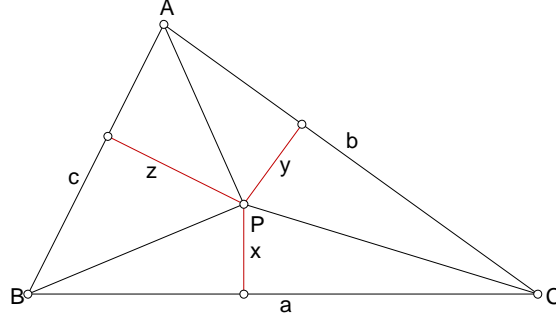
Problem 32: Verilen bir $\triangle ABC$ üçgeninin içinden serbest bir P noktası seçiliyor. P noktasının, $\triangle ABC$ nin kenarlarına olan uzaklıkları x, y, z olsun. $x.y.z$ çarpımının en büyük olması için P noktası nasıl seçilmelidir?

Çözüm: x, y, z uzunluklu doğru parçaları sırasıyla $\triangle ABC$ a, b, c uzunluklu kenarlarına dik olarak

çizilsin. $A(ABC) = S$ olsun. $A(BCP) = \frac{a.x}{2}$, $A(ACP) = \frac{b.x}{2}$, $A(ABP) = \frac{c.x}{2}$ olduğundan

$ax + by + cz = 2S$ dir. $A \geq G$ eşitsizliğinden $ax + by + cz \geq 3 \sqrt[3]{(ax)(by)(cz)} \Rightarrow xyz \leq \frac{8}{27} . S^3$ olur.

$x.y.z$ çarpımının $\frac{8}{27}.S^3$ değerine ulaşabilmesi için gerek ve yeter şart $ax = by = cz$ olmasıdır. Bu ise $A(BCP) = A(ACP) = A(ABP)$ eşitliklerine denk olur. P noktasının yeri, $\triangle ABC$ nin ağırlık merkezine gelecek şekilde seçilmesi gerekir.

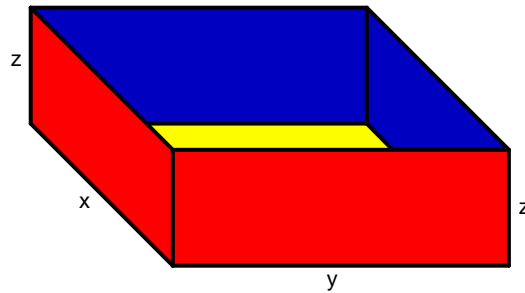


NOT: $A(BCP) = A(ACP) = A(ABP)$ eşitliğini sağlayan, ağırlık merkezinden başka bir nokta bulunmadığını görmek zor değildir. Bu kısmın irdelenmesi okuyucuya bırakılmıştır.

Problem 33: Hacmi $32 br^3$ olan üstü açık dikdörtgenler prizması şeklindeki bir kutunun dış yüzey alanı en az kaçtır? Bunun için kutunun boyutları ne olmalıdır?

Çözüm: x, y, z boyutlarına sahip kutunun tabanı $x.y$ alanlı dikdörtgen olsun. Bu durumda kutunun hacmi $x.y.z = 32$ ve dış yüzey alanı $S = 2xz + 2yz + xy$ olur. $A \geq G$ eşitsizliğinden

$2xz + 2yz + xy \geq 3.\sqrt[3]{2xz.2yz.xy} \Rightarrow S \geq 3.\sqrt[3]{4.(xyz)^2} \quad S \geq 48 br^2$ dir. S yüzey alanının 48 olabilmesi için gerek ve yeter koşul $2xz = 2yz = xy$ olmasıdır. Buna göre $x = y = 2z$ olup $x = 4, y = 4, z = 2$ elde edilir.



Problem 34: Yarıçapı $R = 5\sqrt{3}$ olan kürenin içine yerleştirilen dikdörtgenler prizmasının hacmi en fazla kaç olabilir?

Çözüm: Dikdörtgenler prizmasının birbirine dik ayrıtlarının uzunlukları x, y, z ve hacmi $V = xyz$ olsun. Kürenin çapı, prizmanın cisim köşegeni olduğundan $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 300$ yazılır. $G \leq K$ eşitsizliğinden $\sqrt[3]{xyz} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \Rightarrow V^{\frac{1}{3}} \leq 10$ olup $V \leq 1000$ bulunur. V nin en büyük değeri olan 1000'e ulaşabilmesi için gerek ve yeter koşul $x = y = z = 10$ olmasıdır.

Problem 35: Çevresi 12 olan bir üçgenin alanı en fazla kaç olabilir?

Çözüm: Daha genel olarak üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ve çevresi $a + b + c = 2p$ sabit bir sayı olduğunda problemi çözelim. Bu problem geometride, 'üçgenler için izoperimetri teoremi' olarak bilinir.

Üçgenin alanı A olmak üzere $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ eşitliğini göz önüne alalım. Burada p sabit ve $(p-a), (p-b), (p-c)$ terimlerinin her biri değişkendir. O halde değişken olan $(p-a)(p-b)(p-c)$ çarpımının en büyük değerini arayalım. $A \geq G$ eşitsizliğinden

$$(p-a) + (p-b) + (p-c) \geq 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow 3p - (a+b+c) \geq 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow \frac{p^3}{27} \geq (p-a)(p-b)(p-c)$$

elde edilir. $(p-a)(p-b)(p-c)$ çarpımının alabileceği en büyük değer olan $\frac{p^3}{27}$ ye ulaşabilmesi için gerek ve yeter koşul $p-a = p-b = p-c$ ya da buna denk olarak $a = b = c$ olmasıdır. Bir başka ifadeyle; çevresi sabit olan bir üçgen eğer eşkenar ise alanı en büyük olur.

Problemde verilen üçgenin çevresi 12 olduğundan $a = b = c = 4$ kenar uzunlukları için alanı

$$A = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$
 en büyük değerine ulaşır.

Problem 36: Alanı 1 olan herhangi bir dışbükey dörtgenin köşegenlerinin ve kenarlarının uzunlukları toplamının en az $2(2 + \sqrt{2})$ olduğunu gösteriniz. (İspanya 1997)

Çözüm: Alanı 1 olan dışbükey $ABCD$ dörtgeninde $[AC]$, $[BD]$ köşegenleri arasındaki açı α olsun. $0 < \sin \alpha \leq 1$ dir. $|AC|=e, |BD|=f$ dersek $Alan(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin \alpha \Rightarrow e \cdot f \geq 2$ dir. $A \geq G$ eşitsizliğinden $e + f \geq 2 \cdot \sqrt{e \cdot f} \geq 2\sqrt{2}$ yazılır. Eşitlik durumu $e = f$ ve $\alpha = 90^\circ$ iken vardır.

Diğer taraftan $ABCD$ nin kenar uzunluklarını a, b, c, d ve yarı çevresini $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ ile gösterirsek $Alan(ABCD)^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \cos^2 \frac{A+C}{2}$ eşitliği vardır. Bu durumda

$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) \geq 1$ olmalıdır. $A \geq G$ eşitsizliğinden

$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) \geq 1$ olmalıdır. $A \geq G$ eşitsizliğinden

$$(p-a) + (p-b) + (p-c) + (p-d) \geq 4 \cdot \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\Rightarrow a+b+c+d \geq 4 \cdot \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \geq 4$$

olur. Burada da eşitlik durumu ancak $(p-a) = (p-b) = (p-c) = (p-d)$ olduğunda, ya da $a = b = c = d = 1$ iken sağlanır.

Buna göre $e + f + a + b + c + d \geq 4 + 2\sqrt{2}$ dir ve eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul $ABCD$ dörtgeninin bir kare olmasıdır.

Problem 37: Hipotenüsüne ait yüksekliği 6 olan bir dik üçgenin alanı en az kaç olabilir?

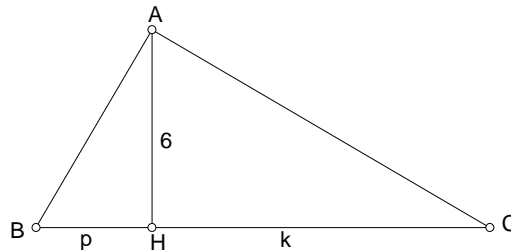
Çözüm: $\angle A = 90^\circ$ olan $\triangle ABC$ üçgeninde $[AH]$ yüksekliğinin uzunluğu 6 olsun. $|BH| = p$,

$|CH| = k$ dersek Öklid bağıntısından $p \cdot k = 36$ olur. $A(ABC) = \frac{|AH| \cdot |BC|}{2}$ olduğundan

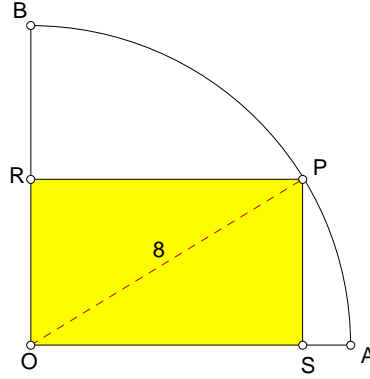
$A(ABC) = 3(p+k)$ dir. O halde alanın en küçük olması için $p+k$ toplamının en küçük olmasını

sağlamalıyız. $A \geq G$ eşitsizliğinden $p+k \geq 2\sqrt{pk} \Rightarrow p+k \geq 12$ olur. Eşitlik durumu sadece

$p = k = 3$ iken geçerlidir. Böylece $A(ABC)_{\min} = 36$ elde edilir.

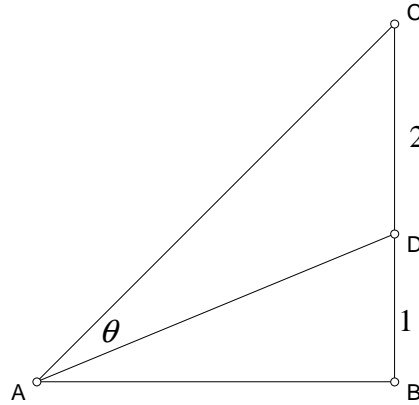


Problem 38: Aşağıdaki şekilde yarıçapı 8 olan O merkezli çeyrek çember A ve B noktalarından geçmektedir. P noktası, \widehat{AB} yayı üzerinde değişmektedir. $OSPR$ dikdörtgeninin alanı en fazla kaç olur?



Çözüm: $|OS| = x, |OR| = y$ dersek $x^2 + y^2 = 64$ olur. $A(OSPR) = xy$ ifadesinin en büyük olmasını istiyoruz. $A \geq G$ eşitsizliğinden $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy \Rightarrow xy \leq 32$ olur. Alanın en büyük değeri olan 32'ye eşit olabilmesi ancak ve ancak $x = y = 4\sqrt{2}$ durumunda mümkündür.

Problem 39: Aşağıdaki $m(B) = 90^\circ$ olan ABC üçgeninde $|BD| = 1, |CD| = 2$ dir. $|AB|$ uzunluğu değişken olduğuna göre $m(CAD) = \theta$ açısının en fazla kaç derece olabileceğini bulunuz?



Çözüm: x bir değişken olmak üzere $|AB| = x, m(ADB) = \alpha, m(ACB) = \beta$ olsun. Bu durumda $\theta = \alpha - \beta$ dir. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ aralığında $g(\theta) = \tan \theta$ fonksiyonu artan olduğundan, θ açısının en büyük olması için $\tan \theta$ nın en büyük olması gerekli ve yeterlidir. $\tan \alpha = \frac{x}{1}, \tan \beta = \frac{x}{2}$ ve

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \text{ olduğu kullanılarak } \tan(\alpha - \beta) = \frac{x - \frac{x}{3}}{1 + x \cdot \frac{x}{3}} = \frac{2x}{x^2 + 3} \text{ bulunur.}$$

$$\frac{x^2 + 3}{x} = x + \frac{3}{x} \text{ şeklinde yazalım. } A \geq G \text{ eşitsizliğinden } x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{3}{x}} = 2\sqrt{3} \text{ olup } \frac{x^2 + 3}{x} \geq 2\sqrt{3}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin pay ve paydasının yeri değiştirilirse $\frac{2x}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ olur. Buradan

$$\tan \theta \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta \leq 30^\circ \text{ elde edilir. Eşitlik durumu } x = \frac{3}{x} \text{ olduğunda, yani } x = \sqrt{3} \text{ iken sağlanır.}$$

Problem 40: a, b, c pozitif reel sayılar ise $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$ eşitsizliğini ispatlayınız. (Asya – Pasifik Matematik Olimpiyatı 1998)

Çözüm: Parantezi açarak başlayalım:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{c}\right) - 1 \text{ (her bir paranteze } A \geq G \text{ uygulayalım)}$$

$$\geq 3\left(\frac{a}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{b}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{c}{\sqrt[3]{abc}}\right) - 1$$

$$= 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} - 1 \text{ (ortadaki terime } A \geq G \text{ uygulayalım)}$$

$$\geq 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) + 3 - 1$$

$$= 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) \text{ elde edilir.}$$