

OLİMPİYATLARA HAZIRLIK İÇİN

BİNOM AÇILIMI PROBLEMLERİ

ve ÇÖZÜMLERİ (L. Gökçe)

Bu yazımızda kombinatorikte önemli bir yer tutan ve *binom açılımı* olarak bilinen teorem ile ilgili bazı ilginç problemler üzerinde duracağız. Ayrıca bazı kombinatorik eşitliklerin ispatında binom teoreminin kullanımına yer vereceğiz.

Binom Teoremi: n negatif olmayan bir tamsayı ve a, b gerçel (veya karmaşık) sayı ise

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$

eşitliği geçerlidir. Tam $n+1$ tane terimden oluşan sağdaki toplam, $(a+b)^n$ ifadesinin binom açılımı olarak isimlendirilir. İspatı da kolayca yapılabilir:

$(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \dots (a+b)$ çarpımının sonucunda herhangi bir $a^{n-r} \cdot b^r$ teriminin katsayısını hesaplayalım. Bunun için $n-r$ tane a ve r tane b çarpılmalıdır.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n-r \text{ tane}} \cdot \underbrace{(a+b)\dots(a+b)}_{r \text{ tane}}$$

şeklinde bir grupta yaparsak buradan bir tane $a^{n-r} \cdot b^r$ terimi elde edilir. n tane $(a+b)$

çarpanından $n-r$ tanesini seçme işi $\binom{n}{n-r}$ yolla yapılabilir. Bu yüzden çarpımın sonucunda

$a^{n-r} \cdot b^r$ teriminden tam olarak $\binom{n}{n-r}$ tane gelecektir. Diğer bir deyişle $(a+b)^n$ çarpımının

sonucunda elde edilebilen tüm terimler $\binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$ biçimindedir. Burada r için $0 \leq r \leq n$

aralığındaki tüm değerleri verilirse $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$ olur. Göstermek istediğimiz de

buydu.

Problem 1: $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ eşitliğini ispatlayınız ($0 \leq r \leq n-1$).

Çözüm: Kombinasyonun tanımından

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} &= \frac{n!}{(n-r)!r!} + \frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r-1)!r!} \left(\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r+1} \right) = \frac{n!}{(n-r-1)!r!} \cdot \frac{n+1}{(n-r)(r+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-r)!(r+1)!} = \binom{n+1}{r+1}\end{aligned}$$

elde edilir.

Problem 2: $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+r}{n} = \binom{n+r+1}{n+1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{0} = 1$, $\binom{n+1}{n} = \binom{n+1}{1}$, $\binom{n+2}{n} = \binom{n+2}{n}$, \dots , $\binom{n+r}{n} = \binom{n+r}{r}$

eşitliklerini ve Problem 1'in sonucunu kullanarak verilen toplamı

$$\begin{aligned}\underbrace{\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+r}{r} &= \underbrace{\binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2}} + \dots + \binom{n+r}{r} \\ &= \dots = \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}\end{aligned}$$

yazılır. Kombinasyonun özelliğinden $\binom{n+r+1}{r} = \binom{n+r+1}{n+1}$ olup ispat tamamlanır.

Problem 3: $n > 0$ tamsayısı için aşağıda verilen eşitlikleri ispatlayınız

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$

Çözüm: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} . b^r$ şeklindeki binom açılımından faydalanacağız

a) Binom açılımında $a = b = 1$ alırsak $(1+1)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 1^{n-r} . 1^r$ olup istenen eşitlik görülür.

b) $a = 1, b = -1$ alırsak $(1-1)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 1^{n-r} . (-1)^r$ olup istenen eşitlik görülür.

c) Eğer (a) ve (b) de ispatladığımız

$$\left. \begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} &= 2^n \\ \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

eşitliklerini bir kez toplayıp bir kez çıkarırsak

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}, \quad \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$$

buluruz.

Problem 4: Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz:

a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots = 2^{n/2} . \cos \frac{n\pi}{4} \quad (n \geq 2)$

b) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots = 2^{n/2} . \sin \frac{n\pi}{4} \quad (n \geq 3)$

Çözüm: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} . b^r$ açılımında $a = 1, b = i$ koyalım. $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$

olduğunu kullanarak $(1+i)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}i + \binom{n}{2}i^2 + \binom{n}{3}i^3 + \dots$ yazalım. Sol tarafın

hesaplanması için De Moivre formülünden faydalanalım:

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2} . \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^n = 2^{n/2} . \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

olur. Binom açılımında sağ tarafın reel ve sanal kısımlarına sırasıyla A, B dersek

$$A + Bi = \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots \right] + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots \right] \cdot i$$

olur. Karmaşık sayıların eşitliğinden

$$A + Bi = 2^{n/2} \cdot \cos \frac{n\pi}{4} + i \cdot 2^{n/2} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$$

olup $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots = 2^{n/2} \cdot \cos \frac{n\pi}{4}$ ve $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots = 2^{n/2} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$ bulunur.

Problem 5: Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots = 2^{n-2} + 2^{(n-2)/2} \cdot \cos \frac{n\pi}{4}$

b) $\binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \dots = 2^{n-2} - 2^{(n-2)/2} \cdot \cos \frac{n\pi}{4} \quad (n \geq 2)$

c) $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \dots = 2^{n-2} + 2^{(n-2)/2} \cdot \sin \frac{n\pi}{4} \quad (n \geq 1)$

d) $\binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \dots = 2^{n-2} - 2^{(n-2)/2} \cdot \sin \frac{n\pi}{4} \quad (n \geq 3)$

Çözüm:

(a) ve (b) hallerini beraber çözelim. Problem 3 ve Problem 4'ün sonucu olan

$$\left. \begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots &= 2^{n-1} \\ \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots &= 2^{n/2} \cdot \cos \frac{n\pi}{4} \end{aligned} \right\}$$

eşitliklerini bir kez toplayıp ve bir kez çıkarırsak istenen elde edilir.

(c) ve (d) hallerini beraber çözelim. Yine Problem 3 ve Problem 4 de bulduğumuz

$$\left. \begin{aligned} \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots &= 2^{n-1} \\ \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots &= 2^{n/2} \cdot \sin \frac{n\pi}{4} \end{aligned} \right\}$$

eşitliklerini bir kez toplayıp ve bir kez çıkarırsak aradığımız eşitliklere ulaşırız.

Problem 6: $A = \binom{90}{1} + \binom{90}{5} + \binom{90}{9} + \dots + \binom{90}{89}$ olmak üzere $A + \frac{1}{4}$ sayısının karekökünün ondalık yazılımında virgölün sağındaki ilk rakam kaçtır?

Çözüm: Problem 5 in (c) durumundan dolayı $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \dots = 2^{n-2} + 2^{(n-2)/2} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$

eşitliğinin doğru olduğunu biliyoruz. Burada $n = 90$ alırsak $A = 2^{88} + 2^{44} \cdot \sin \frac{90\pi}{4}$ olarak

bulunur. $\sin \frac{90\pi}{4} = \sin \frac{45\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ olduğundan $A = 2^{88} + 2^{44}$ tür. Böylelikle

$A + \frac{1}{4} = 2^{88} + 2^{44} + \frac{1}{4} = \left(2^{44} + \frac{1}{2}\right)^2$ olup tam kare biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla $A + \frac{1}{4}$

sayısının karekökü $2^{44} + \frac{1}{2} = 2^{44} + 0,5$ tir. Buradan, ondalık yazılımda virgölün sağındaki ilk rakamın 5 olduğu açıkça görülür.

Problem 7: Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayınız.

(a) $r \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r-1}$

(b) $\frac{n+1}{r+1} \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

Çözüm: Okuyucuya bırakılmıştır.

Problem 8: $\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + n \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1: Problem 7 (a) da verilen $r \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r-1}$ eşitliğinde $r = 1, 2, \dots, n$ değerlerini yazıp toplama yaparsak

$$\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + n \binom{n}{n} = n \left(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-1} \right) = n \cdot 2^{n-1} \text{ buluruz.}$$

Çözüm 2: $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$ eşitliğinin her iki tarafının türevini alıp $x=1$ yazalım.

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2}x + \dots + n \binom{n}{n}x^{n-1} \Rightarrow \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + n \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1} \text{ olur.}$$

Problem 9: $\binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 1: Problem 7 (b) de verilen $\frac{n+1}{r+1} \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ eşitliğinde $r = 0, 1, 2, \dots, n$ değerlerini yazıp elde edilen ifadeleri toplarsak

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{1} \binom{n}{0} + \frac{n+1}{2} \binom{n}{1} + \frac{n+1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{n+1}{n+1} \binom{n}{n} &= \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+1}{n+1} \\ \Rightarrow \binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} &= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \end{aligned}$$

Çözüm 2: $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$ eşitliğinin $[0,1]$ aralığında integralini alırsak aranan eşitliğe ulaşırız.

Problem 10: $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \dots + (n+1)\binom{n}{n} = (n+2) \cdot 2^{n-1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1: Verilen toplamı iki gruba ayırırsak:

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \right] + \left[\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} \right] = 2^n + n \cdot 2^{n-1} = (n+2) \cdot 2^{n-1} \text{ olur.}$$

Çözüm 2: $x(1+x)^n = \binom{n}{0}x + \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^{n+1}$ eşitliğinin her iki tarafının türevini alıp $x=1$ yazarsak istenen sonuç çıkar.

Problem 11: $\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n} = 0$ olduğunu gösteriniz. ($n > 1$)

Çözüm 1: $r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$ eşitliğinde $r=1, 2, \dots, n$ değerlerini yazalım. r nin, tek sayı değeri aldığı terimlerden, çift sayı değeri aldığı terimleri çıkarırsak:

$$1\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \dots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n} = n \left[\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \dots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} \right]$$

olur. Binom açılımından $\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \dots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} = (1-1)^{n-1} = 0$

olduğundan $\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n} = 0$ elde edilir.

Çözüm 2: $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$ özdeşliğinde her iki tarafın türevini alıp $x=-1$ yazılırsa istenen sonuca ulaşılır.

Alıştırma: Siz de $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$ özdeşliğinde her iki tarafın türevini alıp $x=i$ veya $x=-i$ koyarak yeni kombinatorik özdeşlikler bulmayı deneyiniz.

Problem 12: $\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \dots + (-1)^n (n+1)\binom{n}{n} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1: Verilen kombinasyonları iki gruba ayıralım:

$$\left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \right] - \left[\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + \dots + (-1)^{n-1} n \binom{n}{n} \right]$$

biçimindeki yazalım. Problem 11 ve Problem 3 den dolayı her bir köşeli parantez içlerinin 0 olur.

Çözüm 2: $x(1+x)^n = \binom{n}{0}x + \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^{n+1}$ eşitliğinin her iki tarafının türevini alıp $x = -1$ yazarsak istenen sonuç çıkar.

Problem 13: $\frac{1}{1}\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ eşitliğini ispatlayınız.

Çözüm 1: $\frac{n+1}{r+1}\binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ özdeşliğinde $r = 0, 1, 2, \dots, n$ değerlerini yazarsak

$$(n+1) \left\{ \frac{1}{1}\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} \right\}$$

$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+1}{n+1}$$

$$= 2^{n+1} - 1$$

olup buradan $\frac{1}{1}\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ elde edilir.

Çözüm 2: $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$ açılımının $[0,1]$ aralığında integralini alalım:

$$\int_0^1 (1+x)^n .dx = \int_0^1 \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \right) dx$$

$$\Rightarrow \left. \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \left. \left(\binom{n}{0}x + \binom{n}{1}\frac{x^2}{2} + \binom{n}{2}\frac{x^3}{3} + \dots + \binom{n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \right|_0^1$$

olup buradan $\frac{1}{1}\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ elde edilir.

Problem 14: $\frac{1}{2}\binom{n}{0} + \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{4}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+2}\binom{n}{n} = \frac{1+n.2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ eşitliğini kanıtlayınız.

Çözüm: $x(1+x)^n = \binom{n}{0}x + \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^{n+1}$ ifadesinin $[0,1]$ aralığında

integralini alalım:

$A = \int_0^1 x(1+x)^n .dx$ integralini hesaplamak için kısmi integral yönteminden faydalanabiliriz.

$u = x, dv = (1+x)^n dx$ dersek $dx = du$ ve $v = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}$ olur. Buna göre

$$A = \left. \frac{x.(1+x)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 (1+x)^{n+1} .dx = \left. \frac{x.(1+x)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 - \left. \frac{1}{(n+1)(n+2)} (1+x)^{n+2} \right|_0^1$$

$$= \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^{n+2}-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1+n.2^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \text{ bulunur.}$$

Şimdi de $B = \int_0^1 \left(\binom{n}{0}x + \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^{n+1} \right) dx$ integralini hesaplayalım:

$$B = \left. \left(\binom{n}{0}\frac{x^2}{2} + \binom{n}{1}\frac{x^3}{3} + \binom{n}{2}\frac{x^4}{4} + \dots + \binom{n}{n}\frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{2}\binom{n}{0} + \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{4}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+2}\binom{n}{n}$$

olur. A ve B ile gösterdiğimiz integralleri eşitlesek

$$\frac{1}{2}\binom{n}{0} + \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{4}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+2}\binom{n}{n} = \frac{1+n.2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

sonucuna ulaşırız.

Problem 15: $\binom{m}{0}^2 + \binom{m}{1}^2 + \binom{m}{2}^2 + \dots + \binom{m}{m}^2 = \binom{2m}{m}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(1+x)^m(1+x)^m = (1+x)^{2m}$ eşitliğinde her iki tarafın da x^m teriminin katsayılarını karşılaştıralım:

$$\left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{m}x^m \right] \left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{m}x^m \right] \text{ çarpımını göz}$$

önüne alırsak x^m terimini elde edebilmek için her bir parantezden kuvvetleri toplamı m olan iki terim seçilip çarpılmalıdır. Buna göre x^m teriminin katsayısı

$$\binom{m}{0}\binom{m}{m} + \binom{m}{1}\binom{m}{m-1} + \binom{m}{2}\binom{m}{m-2} + \dots + \binom{m}{m}\binom{m}{0}$$

olur. $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$ özelliğinden dolayı bu toplam $\binom{m}{0}^2 + \binom{m}{1}^2 + \binom{m}{2}^2 + \dots + \binom{m}{m}^2$ şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan $(1+x)^{2m}$ açılımında x^m teriminin katsayısının $\binom{2m}{m}$ olduğu açıktır.

Böylece

$$\binom{m}{0}^2 + \binom{m}{1}^2 + \binom{m}{2}^2 + \dots + \binom{m}{m}^2 = \binom{2m}{m}$$

eşitliği geçerli olur.

Problem 16: $\binom{m}{0}^2 - \binom{m}{1}^2 + \binom{m}{2}^2 - \dots + (-1)^m \binom{m}{m}^2$ toplamının sonucunu m nin çift veya tek sayı olması durumlarına göre belirleyiniz.

Çözüm: $(1-x)^m(1+x)^m = (1-x^2)^m$ eşitliğinde her iki taraftan elde edilen x^m terimlerinin katsayılarını karşılaştıralım:

$$\left[\binom{m}{0} - \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 - \dots + (-1)^m \binom{m}{m}x^m \right] \left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{m}x^m \right]$$

çarpımından x^m teriminin katsayısı

$$\binom{m}{0}\binom{m}{m} - \binom{m}{1}\binom{m}{m-1} + \binom{m}{2}\binom{m}{m-2} - \dots + (-1)^m \binom{m}{m}\binom{m}{0}$$

olur. $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$ özelliğinden dolayı bu ifade $\binom{m}{0}^2 - \binom{m}{1}^2 + \binom{m}{2}^2 - \dots + (-1)^m \binom{m}{m}^2$

biçiminde yazılabilir. Diğer taraftan $(1-x^2)^m$ açılımında x^m nin katsayısı $m=2n$ çift sayısı için $(-1)^n \binom{2n}{n}$ dir. $m=2n+1$ tek sayısı için x^m nin katsayısı 0 dir.

Problem 17: $\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \dots + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{m+n}{k}$ olduğunu gösteriniz. ($k \leq \min\{m, n\}$)

Yol Gösterme: $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ eşitliğini kullanınız.

Problem 18: $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^m \binom{n}{m}$ işleminin sonucunu bulunuz ($m \leq n$).

Çözüm: $x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + x^{n-2}(1-x)^n + \dots + x^{n-m}(1-x)^n$ ifadesinde x^n teriminin katsayısını iki farklı yoldan hesaplayacağız. İlk olarak x^n nin katsayısının

$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^m \binom{n}{m}$ olduğuna dikkat edelim. Diğer taraftan

$$x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + x^{n-2}(1-x)^n + \dots + x^{n-m}(1-x)^n$$

$$= (1-x)^n (x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^{n-m})$$

$$= (1-x)^n \frac{x^{n+1} - x^{n-m}}{x-1} = -(1-x)^{n-1} (x^{n+1} - x^{n-m})$$

$$= x^{n-m} \cdot (1-x)^{n-1} - x^{n+1} \cdot (1-x)^{n-1}$$

olur. Bu ifadede ise x^n teriminin katsayısı $(-1)^m \binom{n-1}{m}$ olur. Sonuç olarak $m < n$ iken

$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^m \binom{n}{m} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$ bulunur. $m = n$ durumunda ise verilen toplamın sonucu 0 dır (bkz. Problem 3).

Problem 19: $\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} + \binom{n+2}{k} + \dots + \binom{n+m}{k}$ toplamının sonucunu bulunuz ($k \leq n$).

Çözüm: $(1+x)^n + (1+x)^{n+1} + (1+x)^{n+2} + \dots + (1+x)^{n+m}$ açılımında x^k teriminin katsayısını iki farklı yoldan hesaplayınız. $k < n$ için toplamın sonucu $\binom{n+m+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$ dir. $k = n$ durumunda ise aradığımız toplamın sonucu $\binom{n+m+1}{n+1}$ olur.

Problem 20: $\binom{2n}{0} - \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-2}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$ işleminin sonucunun 0, 1 veya -1 olacağını gösteriniz.

Çözüm: $x^{2n}(1-x)^{2n} + x^{2n-1}(1-x)^{2n-1} + x^{2n-2}(1-x)^{2n-2} + \dots + x^n(1-x)^n$ açılımında x^{2n} teriminin katsayısını iki farklı yoldan hesaplayalım. İlk olarak x^{2n} nin katsayısının $\binom{2n}{0} - \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-2}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$ olduğu görülebilir. Diğer taraftan

$$x^{n-1}(1-x)^{n-1} + x^{n-2}(1-x)^{n-2} + \dots + x(1-x) + 1$$

ifadesinin tüm terimleri $2n$ den küçük olduğundan bunların toplama eklenmesinin, x^{2n} teriminin katsayısına hiçbir etkisi olmayacaktır. Dolayısıyla toplamımız

$$\begin{aligned} & (x-x^2)^{2n} + (x-x^2)^{2n-1} + (x-x^2)^{2n-2} + \dots + (x-x^2) + 1 \\ &= \frac{(x-x^2)^{2n+1} - 1}{x-x^2-1} = \frac{1-x^{2n+1} \cdot (1-x)^{2n+1}}{x^2-x+1} = (1-x^{2n+1} \cdot (1-x)^{2n+1}) \frac{1+x}{1+x^3} \end{aligned}$$

olur. $|x| < 1$ olmak üzere geometrik seri toplamından

$$\frac{1+x}{1+x^3} = (1+x)(1-x^3+x^6-x^9+\dots) = 1+x-x^3-x^4+x^6+x^7+\dots \quad (*)$$

yazılır. $x^{2n+1} \cdot (1-x)^{2n+1}$ ifadesinde tüm terimlerin derecesi $2n$ den büyük olduğundan bu terimler sonuca etki etmez. Dolayısıyla sadece (*) açılımında derecesi $2n$ olan terimin katsayısı sorumuzun cevabıdır. Buna göre

$$\binom{2n}{0} - \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-2}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = \begin{cases} 1, & n = 3k \\ 0, & n = 3k+1 \\ -1, & n = 3k+2 \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Problem 21: $\binom{2n}{n} + 2\binom{2n-1}{n-1} + 4\binom{2n-2}{n-2} + \dots + 2^n \binom{n}{n} = 2^{2n}$ eşitliğini ispatlayınız.

Çözüm: $(1+x)^{2n} + 2(1+x)^{2n-1} + 2^2(1+x)^{2n-2} + \dots + 2^n(1+x)^n$ ifadesinde x^n teriminin katsayısını hesaplırsak $\binom{2n}{n} + 2\binom{2n-1}{n-1} + 4\binom{2n-2}{n-2} + \dots + 2^n \binom{n}{n}$ olduğu görülür. Şimdi x^n teriminin katsayısını başka bir yolla bulalım.

$$\begin{aligned} & (1+x)^{2n} + 2(1+x)^{2n-1} + 2^2(1+x)^{2n-2} + \dots + 2^n(1+x)^n \\ &= (1+x)^{2n} \left[1 + \frac{2}{1+x} + \frac{2^2}{(1+x)^2} + \dots + \frac{2^n}{(1+x)^n} \right] \\ &= (1+x)^{2n} \frac{\frac{2^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} - 1}{\frac{2}{1+x} - 1} = (1+x)^{2n} \frac{\frac{2^{n+1}}{(1+x)^n} - (1+x)}{2 - (1+x)} \\ &= \left[2^{n+1}(1+x)^n - (1+x)^{2n+1} \right] \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

olur. $|x| < 1$ için $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots$ olduğundan

$$2^{n+1}(1+x)^n(1+x+x^2+x^3+\dots) - (1+x)^{2n+1}(1+x+x^2+x^3+\dots)$$

ifadesindeki x^n teriminin katsayısını belirlemeliyiz. $2^{n+1}(1+x)^n(1+x+x^2+x^3+\dots)$ çarpımından gelen x^n teriminin katsayısı, $2^{n+1}(1+x)^n$ in katsayıları toplamına eşit olup

$2^{n+1}(1+1)^n = 2^{2n+1}$ dir. $(1+x)^{2n+1}(1+x+x^2+x^3+\dots)$ çarpımından gelen x^n teriminin katsayısı, $(1+x)^{2n+1}$ in açılımındaki $1, x, x^2, \dots, x^n$ terimlerinin katsayılar toplamına eşittir. Dolayısıyla $(1+x)^{2n+1}$ in açılımının ilk yarısındaki katsayılar toplamını bulmalıyız.

Simetriden dolayı $\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}$ olduğundan bu toplam, $(1+x)^{2n+1}$ açılımının tüm katsayılar toplamının yarısına eşittir. Böylece toplam $\frac{1}{2} \cdot 2^{2n+1} = 2^{2n}$ dir. Sonuçta

$2^{n+1}(1+x)^n(1+x+x^2+x^3+\dots) - (1+x)^{2n+1}(1+x+x^2+x^3+\dots)$ ifadesindeki x^n teriminin katsayısı $2^{2n+1} - 2^{2n} = 2^{2n}$ bulunur.

Problem 22: Aşağıda verilen eşitlikleri doğruluğunu kanıtlayınız.

$$a) \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots = \frac{1}{3}(2^n + 2 \cdot \cos n60^\circ)$$

$$b) \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots = \frac{1}{3}(2^n - 2 \cdot \cos(n+1)60^\circ)$$

$$c) \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots = \frac{1}{3}(2^n + 2 \cdot (n+2) \cos n60^\circ)$$

Çözüm: $x^3 = 1$ denkleminin kökleri çözümümüzde önemli bir role sahiptir. 1 in küp kökleri $1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ dir. $w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ dersek $w^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ olur. Bu halde $1+w+w^2 = 0$ ve

$$w^k = \begin{cases} 1, & k = 3m \\ w, & k = 3m+1 \\ w^2, & k = 3m+2 \end{cases}$$

eşitlikleri geçerlidir. $(1+x)^n$ açılımında x için sırasıyla $x=1, x=w, x=w^2$ yazarsak

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \dots (1)$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}w + \binom{n}{2}w^2 + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}w^n = (1+w)^n \dots (2)$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}w^2 + \binom{n}{2}w + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}w^{2n} = (1+w^2)^n \dots (3)$$

De Moivre formülünden

$$(1+w)^n = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^n = (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^n = \cos n60^\circ + i \sin n60^\circ$$

$$(1+w^2)^n = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right)^n = (\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)^n = \cos n60^\circ - i \sin n60^\circ$$

eşitliklerini yazabiliriz. (1), (2), (3) denklemlerini taraf tarafa toplarsak

$$3. \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots \right] = 2^n + (1+w)^n + (1+w^2)^n \text{ olur. Buradan}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots = \frac{1}{3}(2^n + 2 \cdot \cos n60^\circ)$$

elde edilir.

Şimdi (1), (2), (3) denklemlerini sırasıyla $1, w^2, w$ ile çarpıp toplayalım:

$$3. \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots \right] = 2^n + w^2(1+w)^n + w(1+w^2)^n \text{ olur. } w^2 = -1-w \text{ ve } w = -1-w^2 \text{ olup}$$

$w^2(1+w)^n + w(1+w^2)^n = -(1+w)^{n+1} - (1+w^2)^{n+1} = -2 \cos(n+1)60^\circ$ dir. Böylece

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots = \frac{1}{3}(2^n - 2 \cdot \cos(n+1)60^\circ)$$

eşitliğine ulaşırız.

Son eşitliği göstermek için (1), (2), (3) denklemlerini sırasıyla $1, w, w^2$ ile çarpalım:

$$3. \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots \right] = 2^n + w(1+w)^n + w^2(1+w^2)^n \text{ olur. Buradan kolayca}$$

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots = \frac{1}{3}(2^n + 2 \cdot (n+2) \cos n60^\circ)$$

olduğu görülür.

Problem 23: Temel ile Dursun madeni bir parayla şöyle bir oyun oynarlar: Temel 50 defa, Dursun 51 defa madeni parayı atar. Sonuçta daha fazla tura elde eden kişi oyunu kazanır. Dursun'un bu oyunu kazanması kaç farklı şekilde gerçekleşebilir?

Çözüm: Dursun'un oyunu kazanabilmesi şu durumlarda mümkündür:

Temel hiç tura atamazsa, Dursun 1, 2, 3, ..., 50 veya 51 tura getirebilir.

Temel 1 tura getirirse, Dursun 2, 3, ..., 50 veya 51 tura getirebilir.

⋮

Temel 50 tura getirirse, Dursun 51 tura getirir.

Bu durumların toplam sayısı

$$\binom{50}{0} \left[\binom{51}{1} + \binom{51}{2} + \dots + \binom{51}{51} \right] + \binom{50}{1} \left[\binom{51}{2} + \binom{51}{3} + \dots + \binom{51}{51} \right] + \dots \\ + \binom{50}{49} \left[\binom{51}{50} + \binom{51}{51} \right] + \binom{50}{50} \binom{51}{51}$$

olur. $\binom{50}{r} = \binom{50}{50-r}$ olduğundan ilk ve son terimleri gruplayarak toplama yapalım:

$$\binom{50}{0} \left[\binom{51}{1} + \binom{51}{2} + \dots + \binom{51}{51} \right] + \binom{50}{50} \binom{51}{51} = \binom{50}{0} \left[\binom{51}{1} + \binom{51}{2} + \dots + \binom{51}{51} \right] + \binom{50}{0} \binom{51}{0} \\ = \binom{50}{0} \left[\binom{51}{0} + \binom{51}{1} + \binom{51}{2} + \dots + \binom{51}{51} \right] = \binom{50}{0} \cdot 2^{51}$$

Sonra:

$$\binom{50}{1} \left[\binom{51}{2} + \binom{51}{3} + \dots + \binom{51}{51} \right] + \binom{50}{49} \left[\binom{51}{50} + \binom{51}{51} \right] \\ = \binom{50}{1} \left[\binom{51}{2} + \binom{51}{3} + \dots + \binom{51}{51} \right] + \binom{50}{1} \left[\binom{51}{0} + \binom{51}{1} \right] \\ = \binom{50}{1} \left[\binom{51}{0} + \binom{51}{1} + \binom{51}{2} + \binom{51}{3} + \dots + \binom{51}{51} \right] = \binom{50}{1} 2^{51}$$

olur. Bu şekilde devam edersek ortadan önceki ve sonraki terimlerden de

$$\binom{50}{24} \left[\binom{51}{25} + \binom{51}{26} + \dots + \binom{51}{51} \right] + \binom{50}{26} \left[\binom{51}{27} + \dots + \binom{51}{50} + \binom{51}{51} \right] \\ = \binom{50}{24} \left[\binom{51}{25} + \binom{51}{26} + \dots + \binom{51}{51} \right] + \binom{50}{24} \left[\binom{51}{0} + \binom{51}{1} + \dots + \binom{51}{24} \right]$$

$$= \binom{50}{24} \left[\binom{51}{0} + \binom{51}{1} + \binom{51}{2} + \binom{51}{3} + \dots + \binom{51}{51} \right] = \binom{50}{24} 2^{51}$$

olarak hesaplanır. Tüm bunların toplamına ortadaki $\binom{50}{25} \left[\binom{51}{0} + \binom{51}{1} + \dots + \binom{51}{25} \right]$ terimini de eklemeliyiz. Ortanca terimin değeri $\binom{50}{25} 2^{50}$ dir.

Gruplama yaptığımız terimlerin toplamı ise

$$\binom{50}{0} 2^{51} + \binom{50}{1} 2^{51} + \dots + \binom{50}{24} 2^{51} = 2^{51} \frac{2^{50} - \binom{50}{25}}{2} = 2^{100} - 2^{50} \binom{50}{25} \text{ dir. Bu iki sonucu}$$

toplarsak $2^{50} \binom{50}{25} + \left(2^{100} - 2^{50} \binom{50}{25} \right)$ olup 2^{100} bulunur.

Problem 24: Düzlemde alınan 10 nokta ile en fazla kaç tane çokgen oluşturabiliriz?

Çözüm: 3 kenarlı çokgen $\binom{10}{3}$ tane, 4 kenarlı çokgen $\binom{10}{4}$ tane, ... , 10 kenarlı çokgen

$\binom{10}{10}$ tane olduğundan toplam çokgen sayısı

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} - \binom{10}{2} = 1024 - (1 + 10 + 55) = 958 \text{ dir.}$$

Problem 25: $A = 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + \dots - 19x^{19} + 20x^{20}$ ve

$B = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 19x^{19} + 20x^{20}$ veriliyor. $A.B$ ifadesinden, parantezler açıldıktan sonra elde edilen polinomda x^{19} ün önündeki katsayı ne olur? (Antalya – 1997)

Çözüm: $A.B(x)$ çarpım fonksiyonunda x yerine $-x$ yazalım. $A.B(x) = A.B(-x)$ olduğundan $A.B$ bir çift fonksiyondur. Dolayısıyla x^{19} ün katsayısı 0 dir.

Problem 26: $(1 + x + x^2)^9$ ifadesinin açılımında x^5 in katsayısı nedir? (UMO – 2002)

Çözüm: 882

Problem 27: $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{18} - x^{19}$ polinomu verilsin. $Q(x) = P(x-1)$ şeklinde tanımlanan Q polinomunda x^2 nin katsayısı nedir?

Çözüm: 1140

Problem 28: $P(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + x^{100})^3$ polinomunda parantezler açıldıktan sonra, x^{111} in katsayısı ne olacaktır? (Antalya – 1998)

Çözüm: 6130

Problem 29: $(\sqrt{10} + 3)^{2001}$ sayısının ondalık açılımında virgülden sonraki 33 üncü rakam kaçtır? (UMO – 2001)

Çözüm: 0

Problem 30: $(x + x^2 + \dots + x^{19} + x^{20})^3$ ifadesinin açılımında benzer terimler toplandıktan sonra ortaya çıkan ifade kaç terimlidir? (Antalya – 2000)

Çözüm: Açılımda 58 terim vardır. Çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

Problem 31: $(x + y + z + t)^{120}$ açılımında kaç terim vardır?

Çözüm: $\binom{120}{3}$

Problem 32: $(1+x^3+x^5+x^7)^{100}$ açılımında x^{18} in katsayısı nedir?

Çözüm: Multinomal açılmadan $(1+x^3+x^5+x^7)^{100} = \sum_{a+b+c+d=100} \frac{100!}{a!b!c!d!} 1^a x^{3b} x^{5c} x^{7d}$ dir. x^{18} in katsayısını bulmak için

$$\left. \begin{aligned} a+b+c+d &= 100 \\ 3b+5c+7d &= 18 \end{aligned} \right\}$$

denklem sistemini negatif olmayan tamsayılar kümesinde çözmeliyiz. Bu denklemlerin (a,b,c,d) dörtlüsü çözümleri $(94,6,0,0)$, $(96,2,1,1)$, $(96,1,3,0)$ şeklindedir. Dolayısıyla x^{18} in katsayısı $\frac{100!}{94!6!0!0!} + \frac{100!}{96!2!1!1!} + \frac{100!}{96!3!1!0!}$ olur.

Problem 33: $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^5$ açılımında x^{12} nin katsayısı nedir?

Çözüm: 305.

Problem 34: $(1+0,02)^{120}$ ifadesinin açılımında değeri en büyük olan terimi bulunuz.

Çözüm: $r+1$ inci terim, r inci terimden büyük olsun.

$$\frac{\binom{120}{r}(0,02)^r}{\binom{120}{r-1}(0,02)^{r-1}} > 1 \Rightarrow \frac{121-r}{r}(0,02) > 1 \Rightarrow 121-r > 50r \Rightarrow r < \frac{121}{51}$$

olup $r=0,1,2$ olabilir. Yani 1. terim $<$ 2. terim $<$ 3. terim olur. Bir başka deyişle $r=3,4,5,\dots,120$ için 3. terim $>$ 4. terim $>$ 5. terim $>$... $>$ 121. terim şeklinde sıralanır. O halde açılımdaki en büyük terim, 3. terimdir. $r=2$ için açılımın 3. terimi $\binom{120}{2}(0,02)^2$ olarak bulunur.

Problem 35: $(1+0,006)^{500}$ ifadesinin açılımında değeri en büyük olan terimi bulunuz.

Çözüm: $r+1$ inci terim, r inci terimden büyük olsun.

$$\frac{\binom{500}{r}(0,006)^r}{\binom{500}{r-1}(0,006)^{r-1}} > 1 \Rightarrow \frac{501-r}{r}(0,006) > 1 \Rightarrow r < \frac{1503}{503}$$

olup $r = 0, 1, 2$ olabilir. $r = 3, 4, 5, \dots, 500$ için 3. terim $>$ 4. terim $>$ 5. terim $>$... $>$ 501. terim şeklinde sıralanır.

Problem 36: $a_n = \frac{n^2}{(1,001)^n}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) dizisinin en büyük terimi kaçınıcı terimdir?

(Antalya – 2000)

Çözüm: $n+1$ inci terim, n inci terimden daha büyük olsun. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ eşitsizliğini çözmeliyiz.

Bu eşitsizliği sağlayan en büyük n tamsayı değerinin $n = 2000$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla en büyük terim 2001 inci terimdir.

Problem 37: $(1+x^2-x^3)^{1000}$ ve $(1-x^2+x^3)^{1000}$ ifadelerinin açılımında hangisinde x^{20} nin katsayısı daha büyüktür?

Çözüm: Her iki açılımın katsayıları mutlak değerce birbirine eşittir. Multinomal açılımdan

$$(1+x^2-x^3)^{1000} = \sum_{a+b+c=1000} \frac{1000!}{a!b!c!} 1^a (x^2)^b (-x^3)^c$$

olup $2b+3c=20$ dersek burada c çift sayı olmalıdır. Diğer açılıma bakalım:

$$(1-x^2+x^3)^{1000} = \sum_{a+b+c=1000} \frac{1000!}{a!b!c!} 1^a (-x^2)^b (x^3)^c$$

olup $2b+3c=20$ dersek burada b nin bazı değerleri tek sayıdır. Yani ilk açılımda x^{20} nin katsayıları hep pozitif, ikinci açılımda ise bazıları negatiftir. Dolayısıyla ilk açılımdaki x^{20} nin katsayısı daha büyüktür.