PİSAGOR ÜÇLÜLERİ

Şafak Alpay *

Aralarında $x^2 + y^2 = z^2$ ilişkisi olan (x, y, z) üçlülerine pisagor üçlüleri deniyor [1]. Bir dik üçgenin dik kenarları ile hipotenüsünün böylesi bir üçlü oluşturduğuna dikkat edersek pisagor üçlüsü isminin nereden kaynaklandığına anlarız. Hem Diophantus'un Arithmetica, hem de Öklid'in Elemanlar adlı yapıtlarında pisagor üçlüleri üretmek için yöntem verilir. Keyfi seçilen s ve t tamsayıları ile $x = 2st$, $y = s^2 - t^2$, $z = s^2 + t^2$ biçiminde tanımlanan (x, y, z) bir pisagor üçlüsüdür. Pekiyi, acaba tüm pisagor üçlüleri bu biçimde betimlenebilir mi? Bu soruyu olumlu olarak yanıtlayan ve Fibonacci olarak bilinen Piza'lı Leonardo (1175-1250) dur [2].

(x, y, z) bir pisagor üçlüsü ise her k doğal sayısı için (kx, ky, kz) de bir pisagor üçlüsüdür. $(3, 4, 5)$ pisagor üçlüsünden $(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15)$, $(12, 16, 20)$ gibi üçlülerin yanısıra sayılabilir sonsuzlukta pisagor üçlüsü elde edebiliriz. Pisagor üçlülerinin tümünü bilmek başka pisagor üçlülerinin katları olarak elde edilemeyenleri bulmak demektir.

Tanım: Ortak bölenleri olmayan x, y, z tamsayılarından oluşan (x, y, z) pisagor üçlüsüne temel (öz) pisagor üçlüsü denir.

Örneğin $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$ temel pisagor üçlüleri iken $(10, 24, 26)$ değildir. Temel pisagor üçlüleri tanımı böylesi üçlüleri oluşturan sayıların ortak bölenleri olmadığını söylüyor. Buradan Aritmetiğin Temel Teoremi ve Öklid önermesi ile x, y, z sayılarından herhangi ikisinin de ortak bölenleri olmadığını (yani, aralarında asal olduklarını) gösterebiliriz [3].

Temel pisagor üçlülerinin kanıtını [3] te bulabileceğiniz dikkate değer bir özelliği vardır.

Önerme: Temel pisagor üçlüsü (x, y, z) de x, y sayılarından biri tek, diğeri çift sayıdır.

Bu önermeden (x, y, z) temel pisagor üçlüsündeki sayıların hepsinin asal olamıyacağını elde ederiz. (Nasıl ?). Ancak z ve x veya y den birinin asal olduğu temel pisagor üçlüleri vardır. $(3, 4, 5)$, $(11, 60, 61)$ ve $(19, 180, 181)$ böylesi üçlülerdir. Böyle temel pisagor üçlülerinin sayılabilir sonsuzlukta olup olmadıklarını bilmiyoruz. Temel pisagor üçlüsü (x, y, z) de x ve y sayılarından sadece biri çift sayı olabilir. Bundan böyle temel pisagor üçlüsü (x, y, z) de x in çift, y nin tek olduğunu varsayacağız. Bu durumda z de tek olmalıdır. Tersi durum x ve z'nin en büyük ortak böleninin $(x, z) \geq 2$ gerektirir ki, bu bir çelişkidir.

Teorem: Temel pisagor üçlüsü (x, y, z), aralarında asal s ve t $(s > t > 0)$ sayıları için

$$x = 2st, \quad y = s^2 - t^2, \quad z = s^2 + t^2$$

ile betimlenir. s ve t den biri tek, diğeri çift sayılardır.

Kanıt: İlk iş (x, y, z) gibi keyfi bir temel pisagor üçlüsünün, bulunabilecek s ve t için yukarıdaki gibi olduğudur. y in çift, y ve z'nin her ikisinin de tek olduğunu varsaydığımızdan $z + y$ ve $z - y$ sayıları çiftirler. Bu nedenle, u ve v doğal sayıları için $z + y = 2u$ ve $z - y = 2v$ alacağız. Şimdi $x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$$

biçiminde yazıp, 4 ile bölerek

$$(\frac{x}{2})^2 = (\frac{z+y}{2})(\frac{z-y}{2}) = uv$$

buluruz. $(u, v) = d$ deyip, $d > 1$ varsayalım. $d|(u - v), d|(u + v)$, başka bir deyişle, $d|y, d|z$ olacağından, bu varsayalım bizi $(y, z) \neq 1$ aykırılığına götürür. Yani $(u, v) = 1$ olmalıdır. Aralarında asal olan iki sayının çarpımı bir kareye eşitse kendileri de kare olmalıdırlar (!). Bu gerçeği u, v çiftine uyguluyarak u ve v'nin her ikisinin de kare olmasını buluruz. $u = s^2$, $v = t^2$ diyelim ve bunları yerlerine koyalım.

$$\begin{aligned} z &= u + v = s^2 + t^2 \\ y &= u - v = s^2 - t^2 \\ x &= 4uv = 4s^2t^2 \quad \text{veya} \quad x = 2st \end{aligned}$$

* ODTÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

buluruz. s ve t nin ortak bölenleri y ve z y yi de böleceklerinden $(y, z) = 1$ gerçeği $(s, t) = 1$ gerektirir. s ve t sayılarının her ikisinin de çift veya tek olması y ve z yi çift yapacaklarından s ve t sayılarının biri çift, diğeri tek olmalıdır.

Kanıtta geri kalan tek şey koşulları sağlayan (x, y) üçlüsünün pisagor üçlüsü olduğudur. Bunu kendiniz yapabileceğiniz gibi, [3] te de bulabilirsiniz. Aşağıdaki önermenin kanıtı da [3] de bulunabilir.

Önerme: (x, y, z) temel pisagor üçlüsünde x veya y,3 ile bölünebilirdir.

Matematik yarışmaları yüzyıllar boyunca yaygın bir eğlence türü ve yarışmacılar içinse ekmek kapısı olmuştu. Fibonacci'nin böylesi bir yarımada çözdüğü soru onun pisagor üçlüleri hakkında bilgi sahibi olduğunu gösteriyor.

Soru: x^2+5 ve x^2-5 sayılarının rasyonel sayıların kareleri olduğu bir x sayısı var mıdır?

Yanıt: Çözüm, rasyonel sayılar kümesinde arandığından x, $a = x^2 + 5$ ve $b = x^2 - 5$ sayılarını paydaları aynı olan

$$x = \frac{x_1}{d}, \quad a = \frac{a_1}{d}, \quad b = \frac{b_1}{d}$$

olarak alalım. Bu değerleri yerine koyarsak

(1) $x_1^2 + 5d^2 = a_1^2$ (2) $x_1^2 - 5d^2 = b_1^2$

buluruz. (1) − (2) ifadesini hesaplarsak

$$10d^2 = a_1^2 - b_1^2 = (a_1 + b_1)(a_1 - b_1)$$

buluruz. Sol taraf çift olduğundan, a_1 ve b_1 sayılarının her ikisi de ya tek, ya da çifttirler. Dolayısı ile $a_1 - b_1$ çift bir sayıdır. Şimdi $a_1 - b_1 = 2k$ diyelim. Buradan

$$a_1 + b_1 = \frac{5d^2}{k}$$

elde ederiz. a_1 ve b_1 için çözersek

$$a_1 = \frac{5d^2}{2k} + k, \quad b_1 = \frac{5d^2}{2k} - k$$

bulur. (1) ve (2) de yerine koyarsak

$$\begin{aligned} x_1^2 + 5d^2 &= (\frac{5d^2}{2k} + k)^2 = (\frac{5d^2}{2k})^2 + 5d^2 + k^2 \\ x_1 - 5d^2 &= (\frac{5d^2}{2k} - k)^2 = (\frac{5d^2}{2k})^2 - 5d^2 + k \end{aligned}$$

Son eşitlikleri toplıyarak

$$k + (\frac{5d^2}{2k})^2 = x_1^2$$

bulunur. Bu eşitlik $(k, \frac{5d^2}{2k}, x_1)$ üçlüsünü pisagor üçlüsü olduğunu söyler. Dolayısı ile temel bir pisagor üçlüsü $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ ve bir t tamsayısı için

$$k = (2mn)t, \frac{5d^2}{2k} = (m^2 - n^2)t, x_1 = (m^2 + n^2)t$$

sağlanmalıdır. İlk iki eşitliği çarpıp, k sayısını yok edersek $5d^2 = 4mn(m^2 - n^2)t^2$ buluruz. Şimdi aramamız gereken hangi m ve n tamsayıları için sağ tarafın bir karenin 5 katının olduğudur. İşe, $m = 5$ alıp, başlarsak

$$d^2 = 4n(5^2 - n^2)t^2$$

buluruz. Sağ tarafın kare olması için $n = 4$ alalım. Bundan

$$d^2 = 4 \cdot 4(5^2 - 4^2)t^2 = 16 \cdot 9t^2 = (12t)^2$$

bulunur. m ve n'nin bu değerleri

$$x_1 = (m^2 + n^2)t = (5^2 + 4^2)t = 41t$$

veya

$$x = \frac{x_1}{d} = \frac{41t}{12t} = \frac{41}{12}$$

verir.

KAYNAKÇA

[1] Alev TOPUZOĞLU, Pisagor Teoremi: Ya Öncesi? *Matematik Dünyası* Cilt1, Sayı2

[2] Şafak ALPAY, Karanlık Çağın Aydınlığı: Fibonacci. *Bilim ve Ütopya*, Ocak 1995

[3] Şafak ALPAY, Pisagor üçlüleri. *Bilim ve Ütopya*, Ağustos 1996