ALAN PROBLEMLERİ

Viktor Prasolov'un büyük eseri *Plane Geometry* kitabının alan bölümünün özgün bir tercümesini matematik severlerin hizmetine sunuyoruz. *Geomania* organizasyonu olarak çalışmalarınızda kolaylıklar dileriz…

L. Gökçe

Giriş Problemleri:

1) Köşegenleri arasındaki açı θ, köşegen uzunlukları da e, f olan dışbükey bir dörtgeninin alanının $\frac{1}{2}ef\sin\theta$ olduğunu gösteriniz.

2) *ABCD* paralelkenarının [*BC*], [*AD*] kenarlarının orta noktaları sırasıyla *E*, *F* olsun. *ABCD* paralelkenarının alanı *S* ise *AE*, *ED*, *BF*, *FD* doğrularıyla oluşturulan dörtgenin alanını bulunuz.

3) Bir teğetler çokgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı *r* olsun. Çokgenin yarı çevresi *p* ise, alanının *pr* olduğunu gösteriniz.

4) *ABCD* paralelkenarının içinde bir *X* noktası verilsin. $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$ olduğunu ispatlayınız.

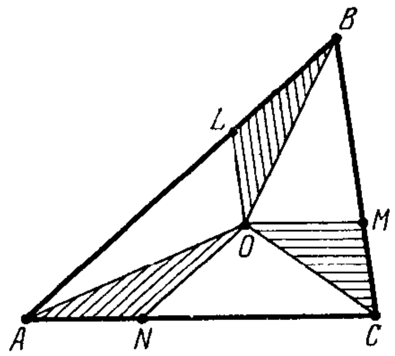
5) Alanı *S* olan *ABCD* karesinin [*CD*], [*DA*], [*AB*], [*BC*] kenarlarının orta noktaları sırasıyla A_1, B_1, C_1, D_1 olsun. AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 doğrularının oluşturduğu dörtgenin alanı nedir?

Kenarortay – Alan İlişkisi:

1) Kenarortaylar üçgenin alanını altı eş parçaya böler, gösteriniz.

2) Verilen bir *ABC* üçgeninin içinden *PAB*, *PBC*, *PCA* üçgenlerinin alanları eşit olacak şekilde bir *P* noktası alınıyor. Bu özelliğe sahip tüm *P* noktalarını bulunuz.

3) Aşağıdaki şekilde verilen *ABC* üçgeninin içinden *BOL*, *COM*, *AON* üçgenlerinin alanlarının eşit olmasını sağlayacak bir *O* noktası bulunuz. Burada *L*, *M*, *N* noktaları üçgenin kenarları üzerindedir ve $OL \parallel BC$, $OM \parallel AC$, $ON \parallel AB$ dir.



4) *ABC* üçgeninin kenarlarının uzantıları üzerinden $\overrightarrow{AB_1} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC_1} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA_1} = 2\overrightarrow{CA}$ olacak şekilde A_1, B_1, C_1 noktaları alınıyor. *ABC* üçgeninin alanı *S* ise, $A_1B_1C_1$ üçgeninin alanı nedir?

5) Dışbükey *ABCD* dörtgeninde [*DA*], [*AB*], [*BC*], [*CD*] kenarlarının uzantıları üzerinden $\overrightarrow{DA_1} = 2\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB_1} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC_1} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD_1} = 2\overrightarrow{CD}$ olacak şekilde A_1, B_1, C_1, D_1 noktaları seçiliyor. $A_1B_1C_1D_1$ dörtgeninin alanı *ABCD* nin alanının kaç katıdır?

6) *ABCDEF* bir kirişler altıgenidir. [*AD*], [*BE*], [*CF*] köşegenleri çemberin birer çapı ise, $S_{ABCDEF} = 2S_{ACE}$ olduğunu gösteriniz.

7) Dışbükey *ABCD* dörtgeninin içinde *OAB*, *OBC*, *OCD*, *ODA* üçgenlerinin alanları eşit olacak biçimde bir *O* noktası vardır. Bu durumda dörtgenin köşegenlerinden birinin, diğerini ortaladığı gösteriniz.

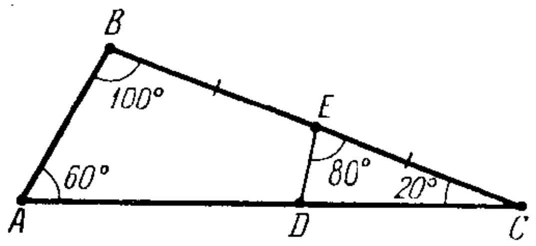
Alanların Hesaplanması:

8) Köşegenleri birbirine dik olan bir yamuğun yüksekliği 4 ve köşegenlerden birinin uzunluğu 5 ise, yamuğun alanı nedir?

9) Dışbükey *ABCDE* beşgeninin her bir köşegeni, beşgenden birim alanlı bir üçgen ayırdığına göre *ABCDE* beşgeninin alanını hesaplayınız.

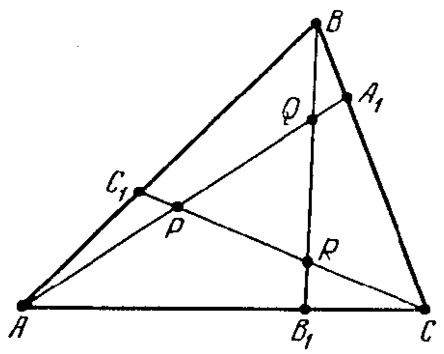
10) Tercüme edilmemiş problem

11) Aşağıdaki *ABC* üçgeninde [*BC*] nin orta noktası *E* dir. $|AC| = 1$ ise $S_{ABC} + 2S_{CDE}$ nedir?



12) $T_a = \triangle A_1A_2A_3$ üçgeni, $T_b = \triangle B_1B_2B_3$ üçgeninin içine çizilmiştir. T_b üçgeni de $T_c = \triangle C_1C_2C_3$ üçgeninin içine çizilmiştir. T_a ve T_c üçgenlerinin kenarları karşılıklı olarak paraleldir. T_b üçgeninin alanını, T_a ve T_c nin alanı türünden ifade ediniz.

13) *ABC* üçgeninin kenarları üzerinden $\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = p$, $\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = q$, $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = r$ olacak şekilde A_1, B_1, C_1 noktaları alınıyor. AA_1, BB_1, CC_1 doğrularının kesişimi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. *PQR* ve *ABC* üçgenlerinin alanlarının oranını bulunuz.



Bir Dörtgenin Bölünmesiyle Oluşan Üçgenlerin Alanları:

14) *ABCD* dörtgeninin köşegenleri *O* noktasında kesişsin. $S_{AOB} = S_{COD}$ olması için gerek ve yeter şart *BC* // *AD* olmasıdır, gösteriniz.

15) a) Dışbükey *ABCD* dörtgeninin köşegenleri *P* noktasında kesişiyor. *ABP*, *BCP*, *CDP* üçgenlerinin alanları biliniyor. DAP üçgeninin alanını bulunuz.
b) Dışbükey bir dörtgenin köşegenler, dörtgeni alanı tamsayı olan dört üçgene ayırıyor. Bu tamsayıların çarpımının bir tam kare olduğunu ispatlayınız.

16) *ABCD* dörtgeninin köşegenleri *P* noktasında kesişiyor ve $S^2_{ABP} + S^2_{CDP} = S^2_{BCP} + S^2_{ADP}$ dir. Köşegenlerden birinin orta noktasının *P* olduğunu ispatlayınız.

17) Dışbükey *ABCD* dörtgeninin içinden üçü doğrusal olmayan P_1, P_2, P_3 noktaları alınıyor ve $i = 1, 2, 3$ için $S_{ABP_i} + S_{CDP_i} = S_{BCP_i} + S_{ADP_i}$ özelliği sağlanıyor. *ABCD* nin bir paralelkenar olduğunu ispatlayınız.

Bir Dörtgenin Bölünmesiyle Oluşan Parçaların Alanları:

18) Dışbükey *ABCD* dörtgeninin [*AB*], [*BC*], [*CD*], [*DA*] kenarlarının orta noktaları sırasıyla *K*, *L*, *M*, *N* olsun. *KM* ve *LN* doğruları *O* noktasında kesiştiğine göre,

$$S_{AKON} + S_{CLOM} = S_{BKOL} + S_{DNOM}$$

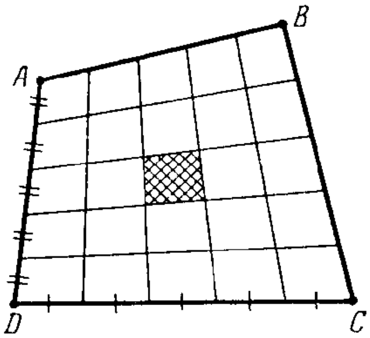
olduğunu ispatlayınız.

19) *ABCD* paralelkenarının [*AB*], [*BC*], [*CD*], [*DA*] kenarları üzerinden sırasıyla *K*, *L*, *M*, *N* noktaları alınıyor. [*KM*] ve [*LN*] doğru parçaları paralelkenarın kenarlarına paralel olup bir *O* noktasında kesişmektedir. *KBLO* ve *MDNO* paralelkenarlarının alanlarının eşit olması için gerek ve yeter şart, *O* noktasının [*AC*] köşegeni üzerinde olmasıdır, gösteriniz.

20) *ABCD* dörtgeninin [*AB*], [*CD*] kenarları üzerinden $\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{|CN|}{|ND|}$ olacak şekilde sırasıyla *M*, *N* noktaları alınıyor. [*AN*] ile [*DM*] bir *K* noktasında, [*BN*] ile [*CM*] ise bir *L* noktasında kesişiyor. $S_{KMLN}=S_{ADK}+S_{BCL}$ olduğunu ispatlayınız.

21) *ABCD* dörtgeninin [*AB*] kenarı üzerinden A_1, B_1 noktaları, [*CD*] kenarı üzerinden C_1, D_1 noktaları seçiliyor. $p<0{,}5$ olmak üzere $|AA_1|=|BB_1|=p|AB|$ ve $|CC_1|=|DD_1|=p|CD|$ ise, $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}=1-2p$ olduğunu ispatlayınız.

22) *ABCD* dörtgeninin her bir kenarı beş eş parçaya ayrılıyor ve aşağıdaki gibi karşılıklı noktalar birleştiriliyor. *ABCD* dörtgeninin alanının, ortadaki taralı dörtgenin alanının 25 katı olduğunu ispatlayınız.



23) Bir paralelkenarın her bir kenarı üzerinden bir nokta alınıyor. Köşeleri bu noktalar olan dörtgenin alanı, paralelkenarın alanının yarısına eşittir. Bu dörtgenin köşegenlerinden en az birinin, paralelkenarın bir kenarına paralel olacağını ispatlayınız.

24) Dışbükey *ABCD* dörtgeninin [*AB*], [*CD*] kenarlarının orta noktaları sırasıyla *K*, *M* dir. Ayrıca *KLMN* bir dikdörtgen olacak şekilde [*BC*], [*AD*] üzerinden *L*, *N* noktaları alınıyor. $S_{ABCD}=S_{KMLN}$ olduğunu ispatlayınız.

25) Bir kare, karenin içindeki bir noktada birbirini dik olarak kesen iki doğru tarafından dört parçaya ayrılıyor. Bu parçalardan üçünün alanı eşitse, dördüncü parçanın alanının da diğer üçüne eşit olacağını ispatlayınız.