18 Temmuz 2011 Pazartesi

Soru 1. Dört farklı pozitif tam sayıdan oluşan bir $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ kümesi için, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ toplamını s_A ile gösteriyoruz. $1 \leq i < j \leq 4$ olmak üzere, $a_i + a_j$ nin s_A yı böldüğü (i, j) ikililerinin sayısını da n_A ile gösterelim. Dört farklı pozitif tam sayıdan oluşan ve n_A nın alabileceği en büyük değeri almasını sağlayan tüm A kümelerini bulunuz.

Soru 2. $\mathcal{S}$ düzlemde en az iki noktadan oluşan sonlu bir küme olsun. $\mathcal{S}$ nin herhangi üç noktasının doğrudaş olmadığını varsayalım. Bir *yeldeğirmeni*, $\mathcal{S}$ ye ait tek bir P noktasından geçen bir ℓ doğrusu ile başlayan bir süreçtir. Bu doğru, *dönme merkezi* P olmak üzere, $\mathcal{S}$ nin başka bir noktasından daha geçtiği ilk ana kadar saat yönünde dönüyor. Bu ikinci noktaya Q dersek, bundan sonra doğru, yeni dönme merkezi Q olmak üzere, tekrar $\mathcal{S}$ nin başka bir noktasından daha geçtiği ilk ana kadar saat yönünde dönmeyi sürdürüyor. Bu süreç sonsuza kadar devam ediyor.
Oluşan yeldeğirmenin $\mathcal{S}$ nin her noktasını sonsuz kez dönme merkezi olarak kullanmasını sağlayacak biçimde, $\mathcal{S}$ ye ait bir P noktası ve P den geçen bir ℓ doğrusu seçebileceğimizi gösteriniz.

Soru 3. Gerçel sayılar kümesinden kendisine tanımlı bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, tüm x, y gerçel sayıları için,

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

koşulunu sağlıyor. Her $x \leq 0$ için, $f(x) = 0$ olduğunu kanıtlayınız.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.

International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Turkish**

Day: 2

19 Temmuz 2011 Salı

Soru 4. $n > 0$ bir tam sayı olsun. İki kefeli bir terazimiz ve ağırlıkları 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$ olan n tane ağırlığımız var. Bu ağırlıkları n hamlede birer birer ve hiçbir aşamada sağ kefe sol kefeden daha ağır olmayacak biçimde teraziye yerleştirmemiz gerekiyor. Tüm ağırlıklar teraziye konulana kadar her hamlede, teraziye henüz konulmamış ağırlıklardan birini seçerek bunu sol veya sağ kefeye yerleştiriyoruz. Bu hamleler dizisini kaç farklı biçimde yapabileceğimizi belirleyiniz.

Soru 5. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini ve $\mathbb{Z}^+$ pozitif tam sayılar kümesini göstermek üzere, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ bir fonksiyon olsun. Tüm m, n tam sayıları için, $f(m) - f(n)$ farkının $f(m-n)$ ile bölündüğünü varsayalım. $f(m) \leq f(n)$ koşulunu sağlayan tüm m, n tam sayıları için, $f(n)$ sayısının $f(m)$ ile bölündüğünü kanıtlayınız.

Soru 6. ABC, çevrel çemberi Γ olan dar açılı bir üçgen olsun. ℓ, Γ ya teğet olan bir doğru ve ℓ nin BC, CA ve AB doğrularına göre yansıtılmasıyla elde edilen doğrular da sırasıyla, ℓ_a, ℓ_b ve ℓ_c olsun. ℓ_a, ℓ_b ve ℓ_c doğrularının belirlediği üçgenin çevrel çemberinin Γ çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.