Soru: $\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}$ ifadesini tam kare yapan tüm n pozitif tamsayılarını bulunuz.

Çözüm (*L. Gökçe*)**:** m bir pozitif tamsayı olmak üzere $\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}=m^2$ olsun. Toplam formüllerinden $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ olduğundan $(n+1)(2n+1)=6m^2$ yazılabilir. Buradan $2n^2+3n+1=6m^2$ olup eşitliği 8 ile genişletirsek $\left(16n^2+24n+9\right)-1=48m^2$ elde edilir. $(4n+3)^2-48m^2=1$ denkleminde $4n+3=x$ denirse $x^2-48m^2=1$ *Pell denklemi* bulunur. Açıkça $x=7$, $m=1$ bu denklemin temel çözümüdür. Bu çözüm kullanılarak tüm pozitif tamsayı çözümleri elde edebileceğimizi biliyoruz. k pozitif tamsayı olmak üzere tüm çözümler:

$$x=\frac{1}{2}\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^k+\left(7-4\sqrt{3}\right)^k\right],\ m=\frac{1}{8\sqrt{3}}\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^k-\left(7-4\sqrt{3}\right)^k\right]$$

biçimindedir. $x\geq 7$ ve $4n+3=x$ olduğundan n nin bir tamsayı olması için x sayısının da $x\equiv 3(\bmod 4)$ formatında olması gerekir. Bundan dolayı $x=\dfrac{1}{2}\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^k+\left(7-4\sqrt{3}\right)^k\right]$ eşitliğini sağlayan x değerlerini incelemeliyiz. $x_k=\dfrac{1}{2}\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^k+\left(7-4\sqrt{3}\right)^k\right]$ kapalı formülü bize indirgemeli dizileri hatırlatmaktadır. $x_1=7$, $x_2=97$ ve karakteristik denkleminin kökleri $7+4\sqrt{3}$, $7-4\sqrt{3}$ olan bir dizinin *indirgeme bağıntısı* $x_{n+2}-14x_{n+1}+x_n=0$ olup bunu $x_{n+2}=14x_{n+1}-x_n$ şeklinde yazabiliriz. $x_n\equiv 3(\bmod 4)$ ve $x_{n+1}\equiv 1(\bmod 4)$ iken *tümevarım prensibi* gereği $x_{n+2}=14x_{n+1}-x_n$ bağıntısında $x_{n+2}\equiv 1(\bmod 4)$ olacağını kolaylıkla söyleyebiliriz. Yine $x_n\equiv 1(\bmod 4)$, $x_{n+1}\equiv 3(\bmod 4)$ iken $x_{n+2}\equiv 1(\bmod 4)$ olacaktır. Diğer bir ifadeyle $x_n\equiv(3,1,3,1,\cdots)(\bmod 4)$ şeklinde periyodik olarak devam eder. Böylece tek sayı indisli x değerleri için $n=\dfrac{x-3}{4}$ bir tamsayı olup aranan tüm n değerleri

$$n=\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2k-1}+\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2k-1}-6}{8}$$

formülüyle ifade edilebilir.