XVI. ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI
İKİNCİ AŞAMA SINAV SORULARI

LİSE 2-3 | 14 Mayıs 2011 | LİSE 2-3

1. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, asal $p = 3k+2$ sayısı, $(m+n)^2 - mn$ sayısını bölüyorsa, m ve n sayılarını da böler; kanıtlayınız.

2. Düzlem üzerinde bir O noktasından çıkan üç farklı OX, OY ve OZ ışınları veriliyor. (Herhangi iki ışın arasındaki açı $180°$ den küçüktür). $A \in OX$, $B \in OY$ ve $C \in OZ$ noktalarını alalım ve OAB, OBC, OAC üçgenlerini oluşturalım. Bu üçgenlerin çevre uzunluklarının 2'ye eşit olmasını sağlayan tek bir $\{A, B, C\}$ nokta üçlüsünün varlığını gösteriniz.

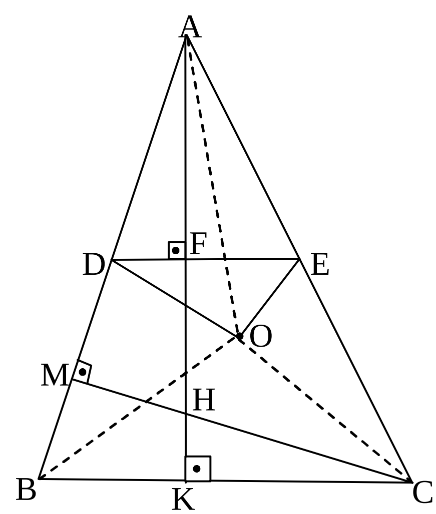
3. a, b, c pozitif sayıları $a+b+c = 3$ eşitliğini sağlasın. O halde,

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{ab+bc+ca} + \frac{1}{1+2\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+2\sqrt{bc}} + \frac{1}{1+2\sqrt{ca}}$$

ifadesinin en küçük değerinin 2 olduğunu gösteriniz.

4. (a_n) dizisi, terimleri pozitif tam sayılar olan bir aritmetik dizi olsun. Her n için p_n ile, a_n sayısının en büyük asal çarpanını gösterelim. $\left(\frac{a_n}{p_n}\right)$ dizisinin sınırsız olduğunu gösteriniz.
Not : Eğer her $n \in N$ için, $x_n \leq M$ sağlanacak şekilde $M > 0$ sabiti varsa, pozitif (x_n) dizisi sınırlıdır. Böyle $M > 0$ sabiti bulunamazsa, dizi sınırsızdır.

5. ABC dar açılı üçgeninde H diklik merkezi, O çevrel çemberin merkezidir. $[AH]$'nin orta dikmesi $[AB]$ ve $[AC]$'yi, sırasıyla, D ve E'de kesiyor. Buna göre, $A\widehat{D}E = B\widehat{D}O$ olduğunu gösteriniz.



NOT : i) Size asıl çözümlerin olacağı 5 kağıt ve karalamaları yapacağınız 5 kağıt verilmiştir. Karalamalar sizde kalacaktır. Lütfen, asıl çözümü yapacağınız kağıtların üzerine adınızı ve soyadınızı yazınız.
ii) Asıl çözümlerinizi anlaşılır ve açıklayıcı bir biçimde yazınız. Bir kağıtta, 1'den fazla çözüm yapmayınız.
iii) Sınav süresi 3.5 saattir.

BAŞARILAR