



XVI. ULUSAL ANTALYA MATEMATİK  
OLİMPİYATI  
İKİNCİ AŞAMA SINAV SORULARI



LİSE 1

14 Mayıs 2011

LİSE 1

1.  $a$  bir pozitif sayı olmak üzere,  $\{a\}$  ile  $a$  sayısının kesir kısmını gösterelim. Bir pozitif  $x$  reel sayısı için  $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$  ve  $\{\frac{1}{x}\} = \{x^2\}$  sağlanırsa,  $x(x^7 - 21)$  ifadesinin değerini bulunuz.

Not:  $\{a\} = a - [a]$ ; ( $[a]$ ,  $a$ 'nın tam değeridir).

2.  $x^2 - 6x + 1 = 0$  denkleminin kökleri  $a$  ve  $b$  olsun.

a) Her  $n = 1, 2, 3, \dots$  için  $a^n + b^n$  sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

b) Her  $n = 1, 2, 3, \dots$  için  $a^n + b^n$  sayısının 5'e bölünmediğini gösteriniz.

3. Her  $x \geq 2, y \geq 2$  reel sayıları için

$$x\left(\frac{4x}{y-1} + \frac{1}{2y+x}\right) + y\left(\frac{y}{6x-9} + \frac{1}{2x+y}\right) > \frac{26}{3}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

4. Dar açılı bir  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberi  $S$  olsun.  $S$ 'nin  $B$  ve  $C$  noktalarındaki teğetleri bir  $M$  noktasında kesişsin.  $M$ 'den geçen ve  $[AB]$ 'ye paralel olan doğru,  $S$  çemberini  $D$  ve  $E$  noktalarında,  $[AC]$ 'yi de  $F$  noktasında kessin.  $|DF| = |FE|$  olduğunu gösteriniz.

5.  $n$  pozitif tam sayı olmak üzere,

$$I_n = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}, \frac{n+1}{n}, \dots \right\}$$

sonsuz kümesini tanımlayalım. Herhangi  $x$  ve  $y$  reel sayısı için,  $|x-y|$  sayısına  $x$  ile  $y$  arasındaki uzaklık diyelim. Aşağıdaki iki önermeyi kanıtlayınız:

a) Her  $n$  için  $I_n$  kümesinin öyle bir elemanı vardır ki, bu elemanla  $\sqrt{2}$  arasındaki uzaklık  $\frac{1}{2n}$ 'den küçüktür;

b) Öyle  $n$  vardır ki,  $I_n$  kümesinin en az bir elemanı ile  $\sqrt{2}$  arasındaki uzaklık  $\frac{1}{2011 \cdot n}$ 'den küçüktür.

**NOT : i)** Size asıl çözümlerin olacağı 5 kağıt ve karalamaları yapacağımız 5 kağıt verilmiştir. Karalamalar sizde kalacaktır. Lütfen, asıl çözümü yapacağımız kağıtların üzerine adımızı ve soyadımızı yazınız.

**ii)** Asıl çözümlerinizi anlaşılır ve açıklayıcı bir biçimde yazınız. Bir kağıtta, 1'den fazla çözüm yapmayınız.

**iii)** Sınav süresi 3.5 saattir.

**BAŞARILAR**