DİKLİK EKSENİ VE EULER DOĞRUSU ÜZERİNE (*L. Gökçe*)

İlk olarak bir üçgenin diklik ekseninin tanımını verelim:

Bir *ABC* üçgeni verildiğinde *BC*, *AC*, *AB* doğrularına çizilen yükseklik ayakları sırasıyla *D*, *E*, *F* olmak üzere *DE*, *DF*, *EF* doğrularının sırasıyla *AB*, *AC*, *BC* ile kesişimleri *K*, *L*, *M* ise, *K*, *L*, *M* noktaları doğrusaldır. *K*, *L*, *M* noktalarını taşıyan bu doğruya *ABC* üçgeninin *diklik ekseni* denir.

Bu özelliği ispatlamak için iyi bilinen bir yardımcı teorem vereceğiz.

Yardımcı Teorem 1: Bir üçgenin dış açıortayları, üçgenin kenarlarının uzantılarını kesiyorsa, bu üç kesim noktası doğrusal olur.

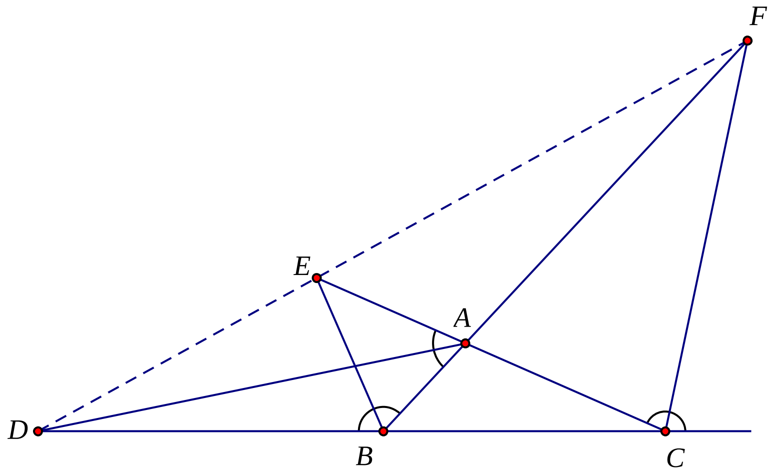
İspat: Şekil – 1 deki gibi bir *ABC* üçgenini göz önüne alalım ve üçgenin [*AD*], [*BE*], [*CF*] dış açıortaylarını çizelim. Dış açıortay teoremini uygularsak:

$$\frac{|CE|}{|EA|}=\frac{|BC|}{|AB|},\ \frac{|AF|}{|FB|}=\frac{|AC|}{|BC|},\ \frac{|BD|}{|DC|}=\frac{|AB|}{|AC|}$$

olur. Bu eşitlikleri çarparsak

$$\frac{|CE|}{|EA|}\cdot\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{|BC|}{|AB|}\cdot\frac{|AB|}{|AC|}\cdot\frac{|AC|}{|BC|}=1$$

olup Menelaüs teoreminden dolayı, *D*, *E*, *F* noktaları doğrusaldır.



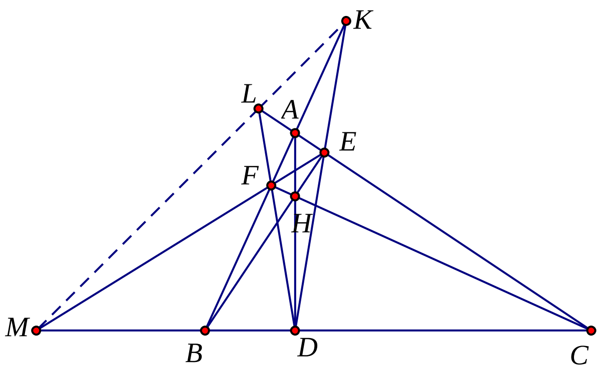
Şekil – 1

Diklik Ekseni Teoremi'nin İspatı: Şekil – 2 yi inceleyelim. ABC üçgeninin diklik merkezi H olmak üzere DEF üçgeninin iç açıortaylarının H da kesiştiğini biliyoruz. Buna göre $\angle FEB = \angle DEB$ dir. Buradan $[LE]$ nin, DEF üçgeninin bir dış açıortayı olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten, $\angle FEL$ ile $\angle FEB$ tümler ve $\angle DEC$ ile $\angle DEB$ tümler olduğundan $\angle FEL = \angle DEC$ dir. Ters açıların eşitliğinden $\angle LEK = \angle DEC$ olduğundan $\angle FEL = \angle LEK$ elde edilir.

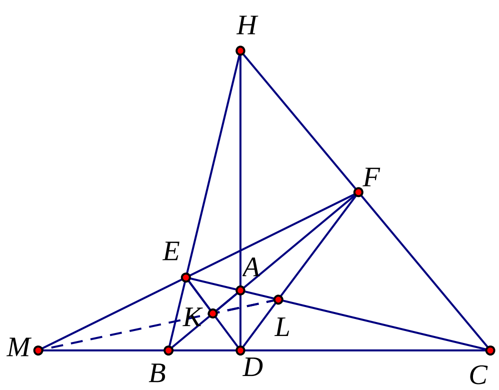
Benzer şekilde FK ve DM doğruları da DEF üçgeninin diğer dış açıortaylarıdır. Yardımcı Teorem – 1 e göre bir üçgende dış açıortayların kenarların uzantılarını kestiği noktalar doğrusal olduğundan K, L, M noktaları da doğrusal olur.

UYARI:

Şekil 3 – deki gibi geniş açılı bir ABC üçgeninde H noktası DEF üçgeninin D noktasına göre bir dış teğet çemberinin merkezi olacaktır. Bu halde de yine K, L, M noktaları doğrusal olacağı benzer biçimde gösterilebilir.



Şekil – 2



Şekil – 3

Şimdi de herhangi bir üçgende bir başka özel doğrudan bahsedelim:

Euler Doğrusu: Herhangi bir ABC üçgeninde diklik merkezi, çevrel çemberin merkezi ve ağırlık merkezi sırasıyla H, O, G olmak üzere H, O, G noktaları doğrusaldır. Ayrıca $|HG| = 2.|GO|$ eşitliği vardır.

H, *O*, *G* noktalarını taşıyan bu doğruya *Euler Doğrusu* denir.

Şimdi bir üçgenin Euler doğrusu ve diklik ekseni ile ilgili ilginç bir problemi sunalım:

Problem (*Taner Kalyoncu*)**:** Herhangi bir ABC üçgeninin Euler doğrusu ve diklik ekseni birbirine diktir.

Problemin çözümüne başlamadan önce bir başka yardımcı teorem daha vereceğiz:

Yardımcı Teorem – 2: Herhangi bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O, iç teğet çemberinin merkezi I olsun. Üçgenin A, B, C açılarına ait dış açıortaylar, üçgenin kenarlarının uzantılarını sırasıyla X, Y, Z noktalarında kesiyorsa, bu üç kesim noktası doğrusal olduğu biliniyor. OI doğrusu ile $\overleftrightarrow{XYZ}$ doğrusun birbirine diktir, gösteriniz.

İspat: ABC üçgeninin dış teğet çember merkezleri I_a, I_b, I_c olsun. $I_aI_bI_c$ üçgeninin çevrel çemberinin merkezini M ile gösterelim. ABC üçgeninin çevrel çemberi C_1, $I_aI_bI_c$ üçgeninin çevrel çemberi C_2 olsun. ABC üçgeni, $I_aI_bI_c$ üçgeninin ortik üçgeni olduğundan C_1, $I_aI_bI_c$ üçgeninin 9 nokta çemberi olur. Ayrıca I noktası $I_aI_bI_c$ üçgeninin diklik merkezi olduğundan, 9 nokta çemberinin önemli bir özelliği olarak, O noktası $[IM]$ doğru parçasının orta noktası olur. $\overleftrightarrow{MOI}$ doğrusaldır. (Şekil – 4)

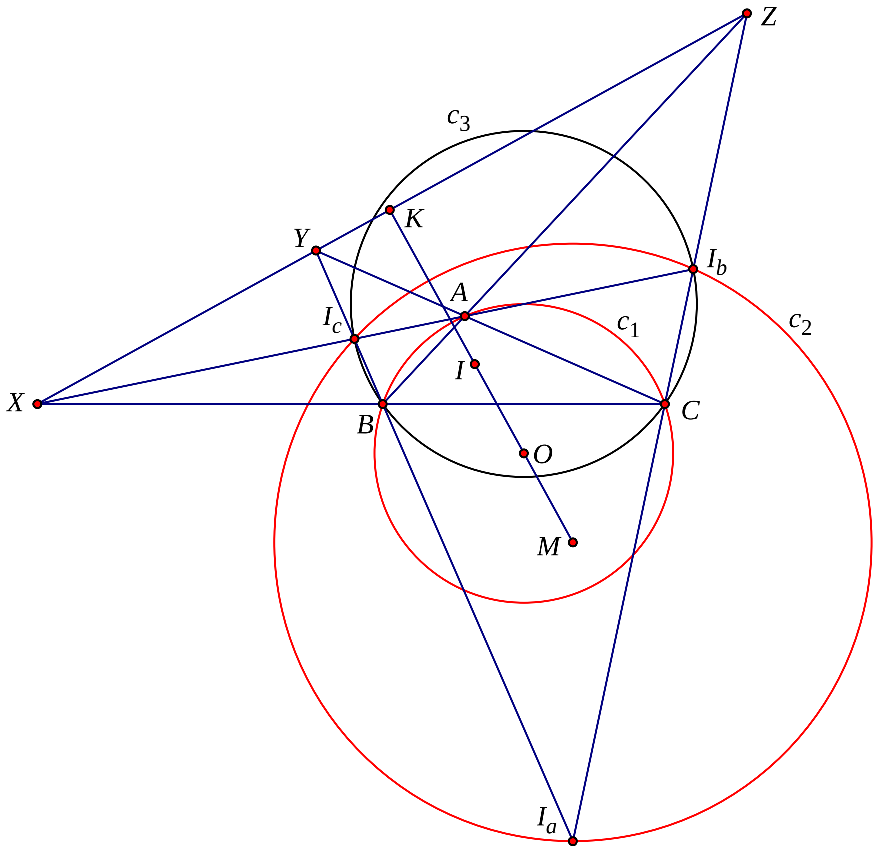
Bu kadar ön hazırlık yaptıktan sonra ispatımızdaki temel düşüncenin, $\overleftrightarrow{XYZ}$ doğrusun C_1 ve C_2 çemberlerinin kuvvet ekseni olduğunun gösterilmesi olduğunu söyleyebiliriz.

Açıortay özelliklerinden, $\angle I_bI_cB = 90^o - \dfrac{\angle BCA}{2}$ ve $\angle I_bCB = 90^o + \dfrac{\angle BCA}{2}$ olup

$$\angle I_bI_cB + \angle I_bCB = 180^o$$

elde edilir. Dolayısıyla I_bI_cBC bir kirişler dörtgenidir. I_bI_cBC dörtgeninin çevrel çemberini de C_3 ile gösterelim. Bu durumda X noktasının, C_1, C_2, C_3 çemberlerinin kuvvet merkezi olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla X noktası, C_1 ve C_2 çemberlerinin kuvvet ekseni üzerindedir.

Benzer düşünce ile I_aI_cAC dörtgeninin de bir kirişler dörtgeni olduğu gösterilebilir. I_aI_cAC dörtgeninin çevrel çemberini C_4 ile gösterirsek, Y noktası C_1, C_2, C_4 çemberlerinin kuvvet merkezi olur. Dolayısıyla Y noktası da C_1, C_2 çemberlerinin kuvvet ekseni üzerinde bulunur. Aynı şekilde Z noktası da C_1, C_2 çemberlerinin kuvvet ekseni üzerinde bulunur. C_1, C_2 çemberlerinin merkezlerini taşıyan doğru, kuvvet eksenine dik olacağından $\overleftrightarrow{MOI}$ doğrusu $\overleftrightarrow{XYZ}$ doğrusuna diktir.

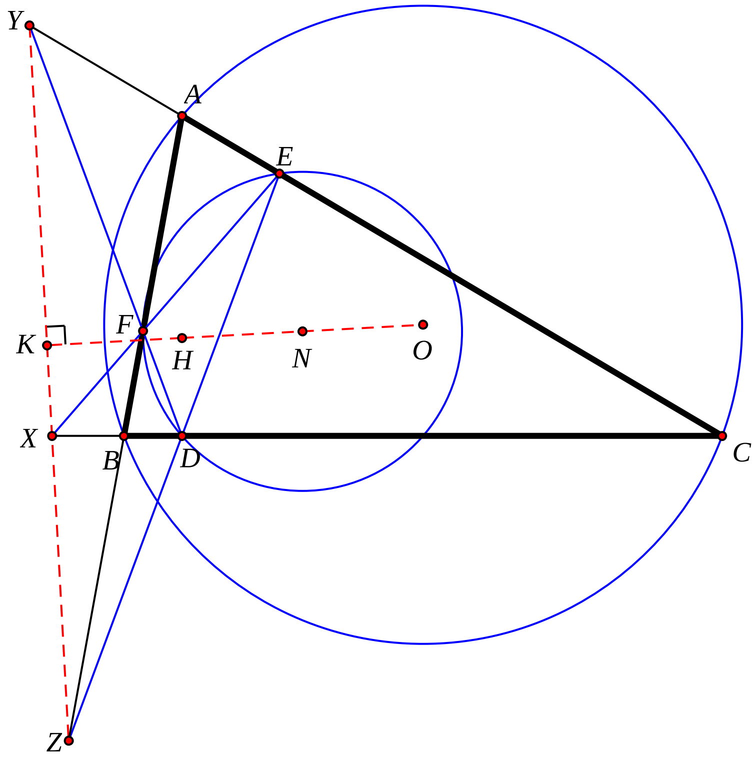


Şekil – 4

Artık problemin çözümünü yapmaya hazırız. Herhangi bir üçgenin Euler doğrusu ile diklik ekseninin dik olduğunu ispatlayabiliriz:

Çözüm: Aşağıdaki Şekil – 5 i takip edelim. ABC üçgeninin yükseklik ayakları D, E, F, diklik merkezi H, çevrel çemberinin merkezi O, dokuz nokta çemberinin merkezi de N olsun. Diklik ekseni teoreminin ispatında gördüğümüz üzere: ABC üçgeninin diklik ekseninin X, Y, Z noktaları aynı zamanda DEF ortik üçgeninin dış açıortay ayaklarıdır. Yardımcı Teorem – 2 ye göre DEF ve ABC üçgenlerinin çevrel çemberlerinin kuvvet ekseni $\overleftrightarrow{XYZ}$ doğrusu olup merkezleri taşıyan $\overleftrightarrow{ONH}$ doğrusu, $\overleftrightarrow{XYZ}$ kuvvet eksenine diktir. $\overleftrightarrow{ONH}$ doğrusu aynı zamanda

ABC üçgeninin Euler doğrusu olduğundan, *ABC* üçgeninin Euler doğrusunun diklik eksenine dik olduğu sonucuna varırız.



Şekil – 5