OLİMPİYATLARA HAZIRLIK İÇİN
DOĞRUSAL İNDİRGEMELİ DİZİ PROBLEMLERİ
ve ÇÖZÜMLERİ (*L. Gökçe*)

Matematikte sayı dizileri teorisinin ilginç bir alt kolu olan *indirgemeli diziler* konusu olimpiyat problemlerinde de karşımıza çıkmaktadır. Aritmetik – geometrik diziler ve meşhur Fibonacci dizisi, aslında özel birer indirgemeli dizidir. Bu yazımızda indirgemeli dizilerin temel özelliklerini inceledikten sonra genel terim bulma problemlerinde nasıl uygulandığını göreceğiz. Daha sonra indirgemeli dizilerin bir takım kombinatorik problemlerinin çözümünde kullanılmasıyla ilgili geniş ve doyurucu bir çalışmayla yazımızı sonlandıracağız. Hayırlı çalışmalar dileriz…

Tanım:

Bir (u_n) dizisinde herhangi bir *n* doğal sayısından itibaren bütün terimler için

$A_0.u_{n+k} + A_1.u_{n+k-1} + A_2.u_{n+k-2} + ... + A_k.u_n = 0$ … (1)

şeklinde doğrusal bir bağıntı sağlanıyorsa (u_n) dizisine *k – inci mertebeden bir doğrusal indirgemeli dizi* denir. (1) bağıntısına da *indirgeme denklemi* denir.

Örneğin, $x_1 = 2, x_2 = -1$ ve $n \geq 1$ için $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n$ indirgeme denklemiyle verilen dizi, 2. mertebeden bir indirgemeli dizidir. İndirgeme denklemini kullanarak dizinin tüm terimlerini elde edebiliriz. x_3 ve x_4 terimlerini bulmak istersek

$n = 1$ için $x_3 = 5x_2 - 4x_1 \Rightarrow x_3 = 5.(-1) - 4.2 = -13$

$n = 2$ için $x_4 = 5x_3 - 4x_2 \Rightarrow x_4 = 5.(-13) - 4.(-1) = -61$

olarak hesaplanır.

Kim indirgemeli dizidir, kim değildir?

r ortak çarpanına sahip $x_{n+1} = r.x_n$ geometrik dizisi 1. merteben doğrusal indirgemeli dizidir.

d ortak farkına sahip $a_{n+1} = d + a_n$ aritmetik dizisi (1) biçiminde değildir. Ancak verilen bu bağıntıda *n* yerine $n+1$ kullanarak

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &= d + a_n \\ a_{n+2} &= d + a_{n+1} \end{aligned}\right\}$$

eşitliklerini elde ederiz. Taraf tarafa çıkarırsak d sabit sayısını yok edebiliriz ve $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ indirgeme bağıntısını elde ederiz. Buna göre aritmetik dizinin de aslında 2. mertebeden bir doğrusal indirgemeli dizi olduğunu anlarız.

$a_{n+2} = \left(a_{n+1}\right)^2 . \left(a_n\right)^3$ bağıntısıyla verilen dizi ise doğrusal indirgemeli dizi değildir.

İndirgemeli dizilerle ilgili önemli bir problem dizinin genel terimini bulmaktır. Örnekler üzerinde açıklayacağımız için burada kullanılan yönteme dikkat edilmelidir.

Problem 1: $x_1 = 2$ ve $n \geq 1$ için $x_{n+1} = 3.x_n$ ile verilen dizinin genel terimini bulunuz.

Çözüm: (x_n) bir geometrik dizi olduğundan $x_n = A.r^n$ biçiminde bir çözüm arayalım. $x_{n+1} = A.r^{n+1}$ olur. Bunları $x_{n+1} = 3.x_n$ eşitliğinde kullanırsak $A.r^{n+1} = 3.A.r^n$ olup $r = 3$ elde edilir. Demek ki $x_n = A.3^n$ şeklindedir. Şimdi de A sabitini bulalım. $x_1 = 2$ verildiğinden $2 = A.3^1$ olup $A = \dfrac{2}{3}$ tür. Buradan $x_n = \dfrac{2}{3}.3^n = 2.3^{n-1}$ genel terimi bulunur.

Burada $x_1 = 2$ değerine *başlangıç koşulu* denir.

Problem 2: $x_1 = 2, x_2 = -1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 1$ için $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n$ indirgeme denklemiyle verilen dizinin genel terimini bulunuz.

Çözüm: Denklem 2. mertebedendir. r_1, r_2 ve A, B sabit sayılar olmak üzere $x_n = A.\left(r_1\right)^n + B.\left(r_2\right)^n$ biçiminde bir çözüm arayalım. $x_{n+1} = A.\left(r_1\right)^{n+1} + B.\left(r_2\right)^{n+1}$ ve $x_{n+2} = A.\left(r_1\right)^{n+2} + B.\left(r_2\right)^{n+2}$ olur. Bu eşitlikleri $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n$ indirgeme denkleminde kullanırsak

$$A.\left(r_1\right)^{n+2} + B.\left(r_2\right)^{n+2} = 5\left(A.\left(r_1\right)^{n+1} + B.\left(r_2\right)^{n+1}\right) - 4\left(A.\left(r_1\right)^n + B.\left(r_2\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow A.\left(r_1\right)^n \left[r_1^2 - 5r_1 + 4\right] + B.\left(r_2\right)^n \left[r_2^2 - 5r_2 + 4\right] = 0$$

olur. Her n doğal sayısı için bu eşitliğin sağlanması için r_1, r_2 sabitlerini $r^2 - 5r + 4 = 0$ denkleminin kökleri olacak şekilde seçelim. Bu denkleme *karakteristik denklem* denir. $r_1 = 4, r_2 = 1$ olarak çözülür. O halde $x_n = A.4^n + B.1^n$ biçimindedir. A, B sabit sayılarını belirlemek için $x_1 = 2, x_2 = -1$ başlangıç koşullarını kullanırsak

$n = 1$ için $4A + B = 2$ ve $n = 2$ için $16A + B = -1$ dir.

$$\left.\begin{aligned} 4A + B &= 2 \\ 16A + B &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Denklem sisteminin çözümünden $A = \frac{-1}{4}$ ve $B = 3$ bulunur. Böylece dizinin genel terimi $x_n = \frac{-1}{4}.4^n + 3.1^n = 3 - 4^{n-1}$ olarak bulunur.

Bu çözümde $r^2 - 5r + 4 = 0$ karakteristik denklemiyle $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 0$ indirgeme bağıntısının katsayılarının eşit olduğuna dikkat edilmelidir. Bu çözümdeki akıl yürütme kullanılarak elde edilebilen bir tanım ve teoremi verelim:

Tanım: $A_0.u_{n+k} + A_1.u_{n+k-1} + A_2.u_{n+k-2} + ... + A_k.u_n = 0$ indirgeme bağıntısına sahip u_n dizisinin karakteristik denklemi

$$A_0.r^n + A_1.r^{n-1} + A_2.r^{n-2} + ... + A_k = 0 \quad \dots (2)$$

dir.

Teorem: $A_0.r^3 + A_1.r^2 + A_2.r + A_3 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri r_1, r_2, r_3 olsun.

1) r_1, r_2, r_3 üç farklı reel sayı ise $u_n = A.(r_1)^n + B.(r_2)^n + C.(r_3)^n$ şeklindedir.

2) $r_1 = r_2 = r_3$ çakışık kökler ise $u_n = A.(r_1)^n + Bn.(r_2)^n + Cn^2.(r_3)^n$ şeklindedir.

3) $r_2 = a + b.i, r_3 = a - b.i$ şeklinde karmaşık sayılar ise $u_n = A.(r_1)^n + B.(a+ib)^n + C.(a-ib)^n$ dir. $|r_2| = |r_3| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ve $\arg(r_2) = \theta$ olmak üzere trigonometrik biçimde $u_n = A.(r_1)^n + B.|r_2|^n.(\cos n\theta + i.\sin n\theta) + C.|r_3|^n.(\cos n\theta - i.\sin n\theta)$ olarak da yazılabilir.

Şimdi bu teoremi problemler üzerinde uygulayalım:

Problem 3: Bir (a_n) dizisi $a_1 = 1, a_2 = 5$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 7$ şeklinde tanımlanmaktadır. Buna göre a_{17} kaçtır? (UMO – 2008)

Çözüm: $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 7$ denkleminde n yerine $n+1$ koyarak $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 7$ elde edilir. Bu iki denklemden $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 3a_n - a_{n-1} = 0$ olup karakteristik denklem $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$ şeklindedir. Buradan $(r-1)^3 = 0$ olup $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ dir. Dolayısıyla dizinin genel terimi $a_n = A.1^n + B.n.1^n + C.n^2.1^n = A + Bn + Cn^2$ şeklindedir.

Şimdi $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 7$ denkleminde $n = 3$ için $a_3 - 2.a_2 + a_1 = 7 \Rightarrow a_3 - 2.5 + 1 = 7$ olup $a_3 = 16$ bulunur. *A*, *B*, *C* sayılarını belirlemek için $a_n = A + Bn + Cn^2$ ifadesinde sırasıyla $n = 1, 2, 3$ değerlerini verirsek

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ A + 2B + 4C &= 5 \\ A + 3B + 9C &= 16 \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemine ulaşırız. Bu denklemlerin çözümünden $A = 4, B = \frac{-13}{2}, C = \frac{7}{2}$ olup $a_n = 4 - \frac{13}{2}n + \frac{7}{2}n^2 = \frac{7n^2 - 13n + 8}{2}$ genel terimi bulunur. Buradan a_{17} nin hesaplanması kolaydır. $a_{17} = \frac{7.17^2 - 13.17 + 8}{2} = \frac{1810}{2} = 905$ bulunur.

Problem 4: Başlangıç koşulları $a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = 3$ ve $a_{n+2} - 4.a_{n+1} + 5.a_n - 2a_{n-1} = 0$ indirgeme bağıntısına sahip olan (a_n) dizisi için a_{111} teriminin 11 ile bölümünden kalan nedir?

Çözüm: $a_{n+2} - 4.a_{n+1} + 5.a_n - 2a_{n-1} = 0$ bağıntısı için karakteristik denklem $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$ dır. Çarpanlarına ayırırsak $(r-1)^2.(r-2) = 0$ olup denklemin kökleri $r_1 = r_2 = 1, r_3 = 2$ bulunur. Bu halde dizinin genel terimi $a_n = A + B.n + C.2^n$ şeklindedir. $n = 1, 2, 3$ değerlerini verirsek

$$\left.\begin{array}{r} A+B+2C=-1 \\ A+2B+4C=0 \\ A+3B+8C=3 \end{array}\right\}$$

olur. Bu denklemlerin çözümünden $A=-2, B=-1, C=1$ elde edilir. Buna göre dizinin genel terimi $a_n=-2-n+2^n$ dir. $n=111$ için $a_{111}=2^{111}-2-111=2^{111}-113$ olur. $-113\equiv 8(\bmod 11)$ dir. Ayrıca Fermat teoremine göre $2^{10}\equiv 1(\bmod 11)$ dir. Buna göre $2^{111}\equiv\left(2^{10}\right)^{11}.2^1(\bmod 11)\equiv 2(\bmod 11)$ olur.

Sonuç olarak $a_{111}=2^{111}-113\equiv 2+8(\bmod 11)\equiv 10(\bmod 11)$ dir. a_{111} teriminin 11 ile bölümünden kalan 10 olur.

Problem 5: $a_1=5, a_2=3$ olmak üzere (a_n) dizisi $a_{n+2}-2.a_{n+1}+2.a_n-3=0$ indirgeme denklemiyle veriliyor. $n\geq 1$ tamsayıları için a_{4n} terimlerinin 32 ile bölümünden kalanların kümesi nedir?

Çözüm: $a_{n+2}-2.a_{n+1}+2.a_n-3=0$ denkleminde n yerine $n+1$ koyarak $a_{n+3}-2.a_{n+2}+2.a_{n+1}-3=0$ yazalım. Bu iki denklem taraf tarafa çıkarılarak -3 sabit terimi yok edilip $a_{n+3}-3.a_{n+2}+4.a_{n+1}-2.a_n=0$ bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı için karakteristik denklemi yazarsak $r^3-3r^2+4r-2=0$ olup $(r-1)(r^2-2r+2)=0$ şeklinde çarpanlarına ayrılır. Karakteristik denklemin kökleri $r_1=1, r_2=1+i, r_3=1-i$ dir. Dolayısıyla dizinin genel terimi $a_n=A+B.(1+i)^n+C.(1-i)^n$ şeklindedir. Şimdi A, B, C katsayılarını belirleyeceğiz. Bunun için a_3 terimini bilmemiz gerekecek. $a_{n+2}-2.a_{n+1}+2.a_n-3=0$ indirgeme denkleminde $n=1$ için $a_3-2.(3)+2.(5)-3=0\Rightarrow a_3=-1$ dir. $a_n=A+B.(1+i)^n+C.(1-i)^n$ bağıntısında $n=1,2,3$ değerlerini verirsek

$$\left.\begin{array}{r} A+B(1+i)+C(1-i)=5 \\ A+2iB-2iC=3 \\ A+2(-1+i)B-2(1+i)C=-1 \end{array}\right\}$$

olup bu denklem sisteminin çözümünden $A=3, B=C=1$ bulunur. Dolayısıyla dizinin genel terimi $a_n=3+(1+i)^n+(1-i)^n$ dir. Kutupsal biçimde $1+i=\sqrt{2}.(\cos 45^o+i.\sin 45^o)$ ve $1-i=\sqrt{2}.(\cos(-45^o)+i.\sin(-45^o))$ olduğundan De Moivre formülünden $(1+i)^n=2^{n/2}.(\cos(n.45^o)+i.\sin(n.45^o))$ ve $(1-i)^n=2^{n/2}.(\cos(-n.45^o)+i.\sin(-n.45^o))$ dir. Böylece $a_n=3+2^{(n+2)/2}.\cos(n.45^o)$ biçiminde de yazılabilir.

$n=4$ için $a_4 = 3+2^3.\cos(4.45^o) = 3-8 = -5$ olup $a_4 \equiv 27(\bmod 32)$ olur.

$n \geq 2$ için $a_{4n} = 3+2^{2n+1}.\cos(4n.45^o) = 3+32.k$, $(k \in \mathbb{Z})$ biçiminde olup $a_{4n} \equiv 3(\bmod 32)$ dir. Sonuç olarak a_{4n} terimlerinin 32 ile kalanlarının kümesi $\{3, 27\}$ dir.

Problem 6: $n=123456789$ olmak üzere $\frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$ sayısının birler basamağını bulunuz.

Çözüm: Bu zor problemi indirgemeli dizileri kullanarak kolayca çözebiliriz.

$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$ dizisinin ilk iki terimini bulalım.

$n=1$ için $x_1 = \frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right) + \left(3-2\sqrt{2}\right)\right] = 3$ ve

$n=2$ için $x_2 = \frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^2 + \left(3-2\sqrt{2}\right)^2\right] = 17$ dir. $x_2 \equiv 7(\bmod 10)$ olur. Şimdi x_n dizisinin rekürans (yineleme) bağıntısını bulalım. Bunun için $r_1 = 3+2\sqrt{2}, r_2 = 3-2\sqrt{2}$ sayılarını kök kabul eden 2. dereceden denklemi kurarsak $r^2 - 6r + 1 = 0$ olur. O halde dizinin yineleme bağıntısı $x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0$ şeklindedir. Bunu kullanarak $x_3, x_4, x_5, ...$ gibi bazı terimleri mod 10 da hesaplayalım.

$x_3 = 6x_2 - x_1 \equiv 6.7 - 3(\bmod 10) \Rightarrow x_3 \equiv 9(\bmod 10)$

$x_4 = 6x_3 - x_2 \equiv 6.9 - 7(\bmod 10) \Rightarrow x_4 \equiv 7(\bmod 10)$

$x_5 = 6x_4 - x_3 \equiv 6.7 - 9(\bmod 10) \Rightarrow x_5 \equiv 3(\bmod 10)$

$x_6 = 6x_5 - x_4 \equiv 6.3 - 7(\bmod 10) \Rightarrow x_6 \equiv 1(\bmod 10)$

$x_7 = 6x_6 - x_5 \equiv 6.1 - 3(\bmod 10) \Rightarrow x_7 \equiv 3(\bmod 10)$

$x_8 = 6x_7 - x_6 \equiv 6.3 - 1(\bmod 10) \Rightarrow x_8 \equiv 7(\bmod 10)$

olur. Buradan görüldüğü üzere x_n dizinin terimlerinin 10 ile bölümünden kalanlar periyodik bir dizi oluşturmakladır ve bu periyot 6 dır. Dolayısıyla $123456789 \equiv 3(\bmod 6)$ olup $x_{123456789} \equiv x_3 \equiv 9(\bmod 10)$ bulunur. Sonuç olarak $n=123456789$ sayısı için $\frac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$ sayısının birler basamağını 9 dur.

Problem 7: $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2011}+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2011}$ sayısının tamsayı olduğunu ve 3 e bölünebildiğini ispatlayınız.

Çözüm: Genel terimi $a_n=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$ olan diziyi göz önüne alalım. $r_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ve $r_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ dersek kökleri r_1,r_2 olan 2. dereceden denklem $r^2-3r+1=0$ olur. O halde (a_n) dizisinin indirgeme bağıntısı $a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0$ olup $a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$ yazılır. $a_n=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$ ifadesini $n=1,2$ değerleri için hesaplayalım.

$n=1$ için $a_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=3$

$n=2$ için $a_2=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}=7$

olur. a_1 ve a_2 terimleri birer tamsayı olduğundan $a_3=3a_2-a_1$ terimi de bir tamsayıdır. Dolayısıyla $a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$ eşitliğine göre $a_4,a_5,...$ terimlerinin tamamı tamsayı olacaktır.

Şimdi $a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$ eşitliğine tekrar dönersek $3a_{n+1}$ ifadesi 3 ün tam katı olduğundan a_{n+2} nin 3 ün katı olması ancak ve ancak a_n nin 3 ün katı olması ile mümkündür. $a_1=3$, 3 ün katı olduğundan $a_3,a_5,...,a_{2n+1},...$ terimlerinin tamamı 3 ün katıdır. Dolayısıyla $a_{2011}=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2011}+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2011}$ sayısı da 3 ün katıdır.

Ayrıca $a_2=7$ terimi 3 ün katı olmadığından $a_4,a_6,...,a_{2n},...$ terimlerinin hiçbiri 3 ün katı olamaz.

Problem 8: Genel terimi $a_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$ olan dizinin tüm terimlerinin tamsayı olduğunu ispatlayınız. Ayrıca her *n* pozitif tamsayısı için a_{3n} terimlerinin 3 ile tam bölünebildiğini gösteriniz.

Çözüm: Okuyucuya bırakılmıştır.

Problem 9: $f_1=1, f_2=1$ ve $n\geq 1$ için $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ indirgeme denklemiyle verilen diziye *Fibonacci dizisi* denir. Bu ünlü dizinin ilk birkaç terimi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34… şeklindedir. Fibonacci dizisinin genel terimini bulunuz.

Çözüm: $f_{n+2}-f_{n+1}-f_n=0$ bağıntısı için karakteristik denklem $r^2-r-1=0$ olup kökleri $r_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ dir. Dolayısıyla dizinin genel terimi $f_n=A.\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B.\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ biçimindedir. $n=1,2$ değerlerini vererek A, B sayılarını çözelim.

$$\left.\begin{aligned}A.\frac{1+\sqrt{5}}{2}+B.\frac{1-\sqrt{5}}{2}&=1\\ A.(3+\sqrt{5})+B.(3-\sqrt{5})&=1\end{aligned}\right\}$$

olup buradan $A=\dfrac{1}{\sqrt{5}}, B=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ bulunur. Böylece $f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ elde edilir.

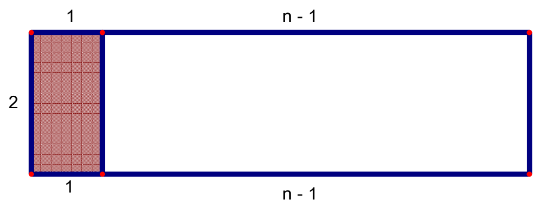
Problem 10: Bir çocuk bir merdiveni çıkarken her hamlesinde ya 1 adım atıyor, ya da 2 adım atıyor. Bu çocuk merdivenin 17. basamağına çıkmak için kaç farklı yol izleyebilir?

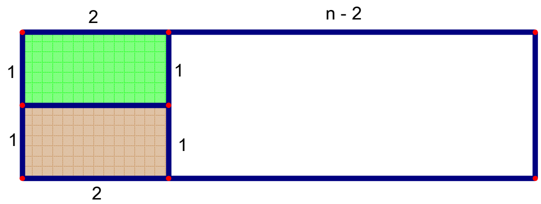
Çözüm: Çocuğun n – inci basamağa ulaşabilmek için izleyebileceği yolların sayısı a_n olsun. Örneğin 1. basamağa çıkmak için izlenebilecek tek yol olduğundan $a_1=1$ dir. 2. basamağa ulaşmak için 2 farklı yol vardır. Ya basamaklar birer birer geçilmiştir ya da direkt 2. basamağa geçilmiştir. Dolayısıyla $a_2=2$ dir. Şimdi '*n – inci basamağa ulaşmak için yapılan son hamle ne olabilir*?' sorusunu yanıtlayalım. Ya $n-1$ inci basamaktan sonra 1 basamak daha çıkılmıştır ya da $n-2$ inci basamaktan sonra 2 basamak birden çıkılmıştır. Buna göre $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ dir. Artık $a_1=1$, $a_2=2$ başlangıç koşulları ve $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ indirgeme bağıntısını kullanarak a_{17} terimini hesaplayabiliriz. a_n dizisinin terimleri 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, … şeklinde olduğundan $a_{17}=2584$ olarak bulunur.

Uyarı: f_n Fibonacci dizisi olmak üzere bu problemde $a_n=f_{n+1}$ olduğuna dikkat ediniz.

Problem 11: Bir koridorun, boyutları $2x11$ m^2 olan dikdörtgen biçimindeki tabanı, boyutları $1x2$ m^2 olan aynı tür halılarla, halılar birbirinin herhangi bir kısmını örtmeksizin, kaplanmak isteniyor. Bu iş kaç farklı biçimde yapılabilir? (Antalya – 1998)

Çözüm 1: Boyutları $2xn$ m^2 olan koridorun $1x2$ m^2 boyutundaki halılarla x_n yolla kaplandığını varsayalım. $n=1$ için $x_1=1$ ve $n=2$ için $x_2=2$ olduğunu görmek kolaydır. Şimdi $2xn$ boyutlu koridorun herhangi bir örtüsünü inceleyelim. Koridorun sol kısmı için aşağıdaki şekillerden birisi geçerli olacaktır.





Birinci durumda kaplama sayısı x_{n-1} ve ikinci durumda kaplama sayısı x_{n-2} olur. Böylece $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ indirgeme formülü elde edilir. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ olduğunu kullanarak x_n dizisinin terimlerini yazarsak 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … $x_{11} = 144$ olur.

Çözüm 2: Koridoru kaplarken, birinci şekildeki gibi $1x2$ boyutlarındaki halılardan *a* tane ve ikinci şekildeki gibi $2x2$ kare biçimindeki halılarından *b* tane kullandığımızı varsayalım. Bu durumda $a+2b=11$ olmalıdır. Bu denklemin negatif olmayan tamsayılardaki (a,b) çözümleri $(11,0),(9,1),(7,2),(5,3),(3,4),(1,5)$ dir.

$(11,0)$ durumunda tek türlü örtülebilir. Bunu $\binom{11}{0}=1$ ile gösterelim.

$(9,1)$ durumunda 9 tane birinci tür halı ve 1 tane ikinci tür (kare) halı kendi arasında $\frac{10!}{9!.1!}=\binom{10}{1}=10$ yer değiştirebilir.

$(7,2)$ durumunda yer değiştirmelerle birlikte $\frac{9!}{7!.2!}=\binom{9}{2}=36$ farklı kaplama yapılabilir.

$(5,3)$ durumunda yer değiştirmelerle birlikte $\frac{8!}{5!.3!}=\binom{8}{3}=56$ farklı kaplama yapılabilir.

$(3,4)$ durumunda yer değiştirmelerle birlikte $\dfrac{7!}{3!.4!}=\dbinom{7}{4}=35$ farklı kaplama yapılabilir.

$(1,5)$ durumunda yer değiştirmelerle birlikte $\dfrac{6!}{1!.5!}=\dbinom{6}{5}=6$ farklı kaplama yapılabilir.

Toplam $1+10+36+56+35+6=144$ farklı kaplama yapılabilir.

Uyarı: İlk çözümde bulduğumuz sonucun $f_{12}=144$ olduğuna dikkat etmişsinizdir. İkinci çözümde ise sonucun $\dbinom{11}{0}+\dbinom{10}{1}+\dbinom{9}{2}+\dbinom{8}{3}+\dbinom{7}{4}+\dbinom{6}{5}=144$ olduğunu gördük. Buna göre $f_{12}=\dbinom{11}{0}+\dbinom{10}{1}+\dbinom{9}{2}+\dbinom{8}{3}+\dbinom{7}{4}+\dbinom{6}{5}$ olmaktadır. Bu problemde koridorun boyutlarını $2\text{x}11$ yerine $2\text{x}n$ alarak n nin tek – çift sayı olma durumlarına göre 2 farklı yoldan çözüp bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız. Fibonacci dizisi ile kombinasyonlar arasındaki

$$f_{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{k}$$
$$f_{2n}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-k-1}{k}$$

formüllerini ispatlayınız.

Problem 12: $f_1=1, f_2=1$ ve $n\geq 1$ için $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ ile tanımlanan Fibonacci dizisinin herhangi ardışık iki teriminin kareleri toplamının yine bu dizinin bir terimi olacağını gösteriniz.

Çözüm: $f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ olduğunu biliyoruz (bkz. Problem 9).

$$(f_n)^2+(f_{n+1})^2$$

$$=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-2.(-1)^n\right]+\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}-2.(-1)^{n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right]=f_{2n+1}\text{ bulunur.}$$

Problem 13: $f_1 = 1, f_2 = 1$ ve $n \geq 1$ için $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ile tanımlanan dizide her $n \geq 1$ için f_{5n} terimlerinin 5 ile tam bölündüğünü gösteriniz.

Çözüm: $5 \mid f_{5k}$ olduğunu tümevarımla gösterelim.

$k = 1$ için $f_5 = 5$ olup 5 ile tam bölünür.

$k = n$ için $5 \mid f_{5n}$ olduğunu kabul edelim. Yani $f_{5n} = 5t$, $(t \in \mathbb{Z})$ şeklinde olsun.

$k = n+1$ için $5 \mid f_{5n+5}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$f_{5n+5} = f_{5n+4} + f_{5n+3} = \left(f_{5n+3} + f_{5n+2} \right) + f_{5n+3}$$

$$= 2.f_{5n+3} + f_{5n+2} = 2\left(f_{5n+2} + f_{5n+1} \right) + f_{5n+2}$$

$$= 3f_{5n+2} + 2f_{5n+1} = 3\left(f_{5n+1} + f_{5n} \right) + 2f_{5n+1}$$

$$= 5f_{5n+1} + 3.f_{5n}$$

olur. Buradan $5 \mid f_{5n+5}$ elde edilir.

Problem 14: Fibonacci dizisinde her $n \geq 1$ için f_{3n} terimlerinin çift olduğunu gösteriniz.

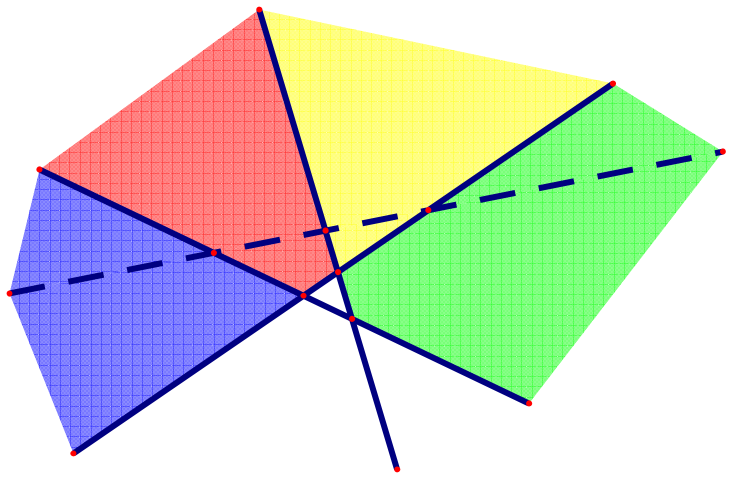
Çözüm: Okuyucuya bırakılmıştır.

Problem 15: Fibonacci dizisinde hangi terimlerin 3 ile tam bölünebileceğini belirleyiniz.

Çözüm: Okuyucuya bırakılmıştır.

Problem 16: 30 doğru düzlemi en fazla kaç parçaya ayırır?

Çözüm 1: n tane doğru düzlemi en fazla x_n parçaya ayırsın. $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 7$ olduğunu görmek kolaydır. $n+1$ inci doğru, önceki n doğrunun tamamını farklı noktalarda kesecek şekilde çizmek pekâlâ mümkündür.



$n+1$ inci doğru, ilk n doğru tarafından $n+1$ parçaya ayrılır. Dolayısıyla $n+1$ inci doğru tam $n+1$ tane bölgeyi keser ve kestiği bölgelerin sayısını 2 ye katlar. Diğer bir deyişle daha önce x_n tane olan bölge sayısı $x_n + n + 1$ olur. Böylece $x_{n+1} = x_n + n + 1$ indirgeme denklemine ulaşırız. Burada n yerine $n+1$ koyarsak

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + n + 1 \\ x_{n+2} &= x_{n+1} + n + 2 \end{aligned}\right\}$$

denklemlerini elde ederiz. n değişkenini yok etmek için taraf tarafa çıkarırsak $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1$ bağıntısını elde ederiz. Burada da sabit terimi yok etmek için n yerine $n+1$ koyarsak

$$\left.\begin{aligned} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n &= 1 \\ x_{n+3} - 2x_{n+2} + x_{n+1} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

olup $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0$ doğrusal indirgeme formülüne ulaşırız. Karakteristik denklem $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$ olup $(r-1)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1$ bulunur. Dolayısıyla aradığımız dizinin genel terimi $x_n = A + Bn + Cn^2$ biçimindedir. A, B, C katsayılarını belirlemek için $n = 1, 2, 3$ değerlerini verelim:

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ A + 2B + 4C &= 4 \\ A + 3B + 9C &= 7 \end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminin çözümü $A=1, B=C=\frac{1}{2}$ olur. Buna göre $x_n=1+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2$ veya $x_n=\frac{n^2+n+2}{2}$ dir. $n=30$ için $x_{30}=1+\frac{30}{2}+\frac{900}{2}=466$ bulunur.

Çözüm 2: Bazen indirgeme denklemini doğrusal hale getirmeden de genel terimi kolayca bulmak mümkün olabilir. $x_{n+1}=x_n+n+1$ denklemini $x_{n+1}-x_n=n+1$ biçiminde yazıp $n=1,2,...,(k-1)$ değerlerini verirsek

$n=1$ için $x_2-x_1=2$

$n=2$ için $x_3-x_2=3$

$\vdots$

$n=k-1$ için $x_k-x_{k-1}=k$

olur. Bu denklemleri taraf tarafa toplarsak $x_k-x_1=-1+\frac{k.(k+1)}{2}$ olup $x_k=1+\frac{k.(k+1)}{2}$ elde edilir. Artık $k=30$ için $x_{30}=466$ olduğunu kolayca hesaplayabiliriz.

Problem 17: İlk *n* doğal sayının kareleri toplamını veren formülü elde ediniz.

Çözüm: İlk n doğal sayının kareleri toplamı x_n olsun. $x_1=1$, $x_2=1+4=5$, $x_3=1+4+9=14$, $x_4=1+4+9+16=30$, $\ldots$ şeklindedir. $x_n=1^2+2^2+...+n^2$ ve $x_{n-1}=1^2+2^2+...+(n-1)^2$ olacağından $x_n-x_{n-1}=n^2$ dir. *n* yerine $n+1$ yazarsak

$$\left.\begin{aligned} x_n-x_{n-1}&=n^2\\ x_{n+1}-x_n&=(n+1)^2\end{aligned}\right\}$$

olur. n^2 terimini yok edersek $x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}=2n+1$ olur. Bu eşitlikte de *n* yerine $n+1$ yazarsak

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}&=2n+1\\ x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n&=2n+3\end{aligned}\right\}$$

olur. Taraf tarafa çıkararak *n* terimini yok edersek $x_{n+2}-3x_{n+1}+3x_n-x_{n-1}=2$ olur. Bu eşitlikte de *n* yerine $n+1$ yazarsak

$$\left.\begin{aligned} x_{n+2}-3x_{n+1}+3x_n-x_{n-1}&=2 \\ x_{n+3}-3x_{n+2}+3x_{n+1}-x_n&=2 \end{aligned}\right\}$$

olur. Sabit terimi yok edersek $x_{n+3}-4x_{n+2}+6x_{n+1}-4x_n+x_{n-1}=0$ doğrusal indirgeme denklemine ulaşırız. Karakteristik denklem $r^4-4r^3+6r^2-4r+1=0$ olup $(r-1)^4=0$ dır. Buradan $r_1=r_2=r_3=r_4=1$ olup genel terim $x_n=A+Bn+Cn^2+Dn^3$ biçimindedir. $n=1,2,3,4$ değerleri vererek *A*, *B*, *C*, *D* sabitlerini belirleyelim.

$$\left.\begin{aligned} A+B+C+D&=1 \\ A+2B+4C+8D&=5 \\ A+3B+9C+27D&=14 \\ A+4B+16C+64D&=30 \end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminden $A=0, B=\frac{1}{6}, C=\frac{1}{2}, D=\frac{1}{3}$ olarak çözülür. O halde dizinin genel terimi $x_n=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3$ olur. Düzenlersek $x_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ bulunur.

Çözüm 2: $x_n-x_{n-1}=n^2$ indirgeme denklemini doğrusal hale getirmeden daha kısa bir çözüm arayacağız. Denklemin $x_n=A+Bn+Cn^2+Dn^3$ şeklinde çözümü olup olmadığını deneyelim. $x_{n-1}=A+B(n-1)+C(n-1)^2+D(n-1)^3$ olup $x_n-x_{n-1}=B+C(2n-1)+D(3n^2-3n+1)$ dir. Bu ifade ile $x_n-x_{n-1}=n^2$ denklemini karşılaştırırsak

$$\left.\begin{aligned} B-C+D&=0 \\ 2C-3D&=0 \\ 3D&=1 \end{aligned}\right\}$$

denklemlerini elde ederiz. Buradan kolayca $B=\frac{1}{6}, C=\frac{1}{2}, D=\frac{1}{3}$ olarak çözülebilir. O halde $x_n=A+\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3$ şeklindedir. Burada $x_1=1$ olduğunu kullanırsak $A=0$ buluruz. Dolayısıyla $x_n=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3$ veya $x_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ şeklinde elde edilir.

Uyarı: $P(n)$ n – inci dereceden bir polinom olsun. Bu son yaptığımız çözüm bize $x_n-x_{n-1}=P(n)$ denkleminin çözümünün $n+1$ inci dereceden $x_n=Q(n)$ şeklinde bir polinom olacağını telkin etmektedir.

Problem 18: İlk *n* doğal sayının küpler toplamını veren formülü elde ediniz.

Çözüm: İlk *n* doğal sayının küpleri toplamı x_n olsun. $x_1 = 1$ olduğu açıktır. $x_n - x_{n-1} = n^3$ olur. Bu denklemin çözümünün $x_n = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4$ şeklinde olup olmadığına bakalım. $x_{n-1} = A + B(n-1) + C(n-1)^2 + D(n-1)^3 + E(n-1)^4$ olduğundan $x_n - x_{n-1} = B + C(2n-1) + D(3n^2 - 3n + 1) + E(4n^3 - 6n^2 + 4n - 1)$ dir. Bu son ifade ile $x_n - x_{n-1} = n^3$ eşitliğini karşılaştırırsak

$$\left.\begin{array}{c} B - C + D - E = 0 \\ 2C - 3D + 4E = 0 \\ 3D - 6E = 0 \\ 4E = 1 \end{array}\right\}$$

olur. Bu denklemin çözümleri $B = 0, C = \frac{1}{4}, D = \frac{1}{2}, E = \frac{1}{4}$ olarak bulunur. Demek ki $x_n = A + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$ şeklindedir. $x_1 = 1$ olduğundan $A = 0$ buluruz. Böylece $x_n = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$ ya da $x_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ elde edilir.

Problem 19: İlk *n* doğal sayının dördüncü kuvvetleri toplamını veren formülü elde ediniz.

Çözüm: $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$ dir. İspatı okuyucuya bırakılmıştır.

Problem 20: Geniş bir masanın üzerinde bulunan bir pire her hamlesinde 1, 2 ya da 3 birim zıplayabiliyor. Pire kendisinden 12 birim uzaklıktaki noktaya en kısa yoldan ulaşmak için kaç farklı yol izleyebilir?

Çözüm: Pirenin doğrusal biçimde bir yol takip etmesi gerektiği açıktır. Pire *n* birim uzaklıktaki noktaya a_n farklı yolla ulaşabiliyor olsun. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$ olur (neden?). Şu soruya cevap arayalım: *Pirenin n – inci noktaya gelmeden önceki son hamlesi ne olabilir*? Bu sorunun cevabı: $n-1, n-2$ veya $n-3$ üncü noktada bulunan pire sırasıyla 1, 2 ya da 3 birim zıplayarak *n* inci noktaya ulaşmış olabilir. Dolayısıyla $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ tür.

Karakteristik denklem $r^3 - r^2 - r - 1 = 0$ şeklindedir. $r = \pm 1$ denenirse bu denklemin tamsayılarda kökü olmadığı görülür. Bu yüzden dizinin genel terimini bulmaya çalışmak yerine indirgeme denkleminden a_{12} terimini elde etmeyi tercih edeceğiz.

$n = 4$ için $a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 4 = 7$

$n = 5$ için $a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 4 + 7 = 13$

$n = 6$ için $a_6 = a_3 + a_4 + a_5 = 4 + 7 + 13 = 24$

$n = 7$ için $a_7 = a_4 + a_5 + a_6 = 7 + 13 + 24 = 44$

$n = 8$ için $a_8 = a_5 + a_6 + a_7 = 13 + 24 + 44 = 81$

$n = 9$ için $a_9 = a_6 + a_7 + a_8 = 24 + 44 + 81 = 149$

$n = 10$ için $a_{10} = a_7 + a_8 + a_9 = 44 + 81 + 149 = 274$

$n = 11$ için $a_{11} = a_8 + a_9 + a_{10} = 81 + 149 + 274 = 504$

$n = 12$ için $a_{12} = a_9 + a_{10} + a_{11} = 149 + 274 + 504 = 927$

Problem 21: $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right]$ ifadesi veriliyor. Şunları ispatlayınız:

(a) $P_n(x)$, $P_n(x) - x.P_{n-1}(x) + \dfrac{1}{4}P_{n-2}(x) \equiv 0$ özdeşliğini sağlar.

(b) $P_n(x)$, n – inci dereceden bir polinomdur. (IMO Shortlist 1978)

Çözüm:

(a) $r_1 = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2}, r_2 = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{2}$ dersek $r_1 + r_2 = x,\ r_1.r_2 = \dfrac{1}{4}$ olup kökleri r_1, r_2 olan ikinci dereceden denklem $r^2 - xr + \dfrac{1}{4} = 0$ dır. Bu karakteristik denkleme sahip olan P_n dizisinin indirgeme formülü $P_{n+2} - xP_{n+1} + \dfrac{1}{4}P_n = 0$ dır. Göstermek istediğimiz de zaten buydu.

(b) P_n dizisinin ilk birkaç terimini hesaplayalım.

$n=0$ için $P_0(x)=1$ dir. Bu sabit polinomun derecesi 0 dır.

$n=1$ için $P_1(x)=x$ dir. Bu polinomun derecesi 1 dir.

$n=2$ için $P_2(x)=x^2-\frac{1}{2}$ olur. Bu polinomun derecesi de 2 dir.

$P_{n+2}(x)=xP_{n+1}(x)-\frac{1}{4}P_n(x)$ indirgeme bağıntımızı göz önüne alalım. $P_n(x)$ n – inci dereceden ve $P_{n+1}(x)$ de $n+1$ inci dereceden bir polinom iken $P_{n+2}(x)$ ifadesinin $n+2$ inci dereceden bir polinom olacağı açıktır. $n=1,2$ için önermemiz doğru olduğundan tümevarım prensibi gereği negatif olmayan her *n* tamsayısı sayısı için de önermemiz doğru olur.

Problem 22: $a_1=10^{11}$, $a_2=10^{29}$ ve $a_{n+2}=\frac{(a_{n+1})^4}{(a_n)^3}$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisi için $\sqrt[3^n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$ işleminin sonucunu hesaplayınız.

Çözüm: $b_n=\log a_n$ diyelim. $b_1=\log a_1=\log 10^{11}=11$, $b_2=\log a_2=\log 10^{29}=29$ ve $b_{n+2}=\log(a_{n+2})=\log\frac{(a_{n+1})^4}{(a_n)^3}\Rightarrow b_{n+2}=4.b_{n+1}-3.b_n$ olur. (b_n) bir doğrusal indirgemeli dizi olduğundan $r^2-4r+3=0$ karakteristik denklemine sahiptir. Bu denklemin kökleri $r_1=3, r_2=1$ olduğundan $b_n=A.3^n+B.1^n$ formundadır. Bu eşitlikte $n=1$ ve $n=2$ değerleri yazılırsa

$$\left.\begin{array}{l}3A+B=11\\ 9A+B=29\end{array}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse $A=3$, $B=2$ bulunur. Böylece $b_n=3.3^n+2=3^{n+1}+2$ olup $a_n=10^{b_n}=10^{3^{n+1}+2}$ bulunur. $a_{n+1}=10^{3^{n+2}+2}$ olup $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{3^n}}=\left(\frac{10^{3^{n+2}+2}}{10^{3^{n+1}+2}}\right)^{\frac{1}{3^n}}=\left(10^{2.3^{n+1}}\right)^{\frac{1}{3^n}}=10^6$ olarak hesaplanır.

Problem 23: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ ve $x_{n+2} = \dfrac{\left(x_{n+1}\right)^3}{\left(x_n\right)^2}$ bağıntısıyla verilen diziyi bulunuz.

Yol Gösterme: $x_{n+2} = \dfrac{\left(x_{n+1}\right)^3}{\left(x_n\right)^2}$ eşitliğinin her iki yanının 5 tabanına göre logaritmasını alın. Daha sonra $y_n = \log_5\left(x_n\right)$ değişken değiştirmesini deneyin.

Problem 24: İlk terimi *a* ve ortak farkı *d* olan bir aritmetik dizinin ilk *n* terim toplamının formülünü elde ediniz.

Yol Gösterme: İlk *n* terim toplamı S_n olmak üzere $S_n - S_{n-1} = d$ olacağını göstererek başlayınız.

Problem 25: *n* tane çember düzlemi en fazla kaç parçaya böler?

Çözüm: *n* tane çember düzlemi en fazla x_n parçaya bölsün. $x_1 = 2$ ve $x_2 = 4$ olduğu açıktır. Çemberlerin düzlemi en fazla sayıda parçaya ayırabilmesi için her bir çember çiftinin iki noktada kesişmesi gerekir. Yani teğet ya da ayrık durumda çemberler olmamalıdır. Böyle *n* tane çember çizilmiş olsun. Biz $n+1$ inci çemberi çizdiğimizde, önceki çemberlerin her biri ile 2 noktada kesişeceğinden bu çember toplam 2*n* noktada kesişir. Dolayısıyla $n+1$ inci çember 2*n* yaya ayrılır. Her bir yay parçası içinde bulunduğu 2*n* tane bölgeyi ikiye bölerek bunların parçalanma sayısını 2 ye katlar. Diğer bir deyişle $n+1$ inci çember çizilince yeni 2*n* tane daha bölge oluşur. Dolayısıyla $x_{n+1} = x_n + 2n$ dir. $n = 1, 2, ..., (k-1)$ değerlerini verirsek

$n = 1$ için $x_2 - x_1 = 2$

$n = 2$ için $x_3 - x_2 = 4$

$\vdots$

$n = k-1$ için $x_k - x_{k-1} = 2(k-1)$

olur. Bu denklemleri taraf tarafa toplarsak $x_k - x_1 = (k-1).k$ olup $x_k = k^2 - k + 2$ bulunur. Yani *n* tane çember düzlemi en fazla $n^2 - n + 2$ parçaya böler.

Problem 26: *n* tane düzlem 3 boyutlu uzayı en fazla kaç parçaya böler?

Çözüm: n tane düzlem uzayı en fazla x_n parçaya bölsün. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$ olduğu açıktır. Çözümümüzde x_4 terimine ihtiyacımız olmamakla birlikte eğer biraz zihnimizi zorlarsak $x_4 = 15$ olduğunu görmek faydalı olabilir. *n* tane düzlem uzayı en fazla sayıda parçaya ayırması için seçilen herhangi üç düzlemin bir ortak noktası olmalı ve dört düzlemin hiçbir ortak noktası olmamalı.

n düzlem çizilmiş olsun. $n+1$ inci düzlemi çizme işleminin uzayın parçalanış sayısını nasıl artırdığına bakalım. Bu düzlem ilk *n* düzlemin her birisi ile bir doğru boyunca kesişir. Ayrıca bu doğrulardan herhangi ikisi bir ortak noktaya sahiptir. Çünkü bu düzlemlerin herhangi üçü bir ortak noktaya sahiptir. Diğer taraftan herhangi üç doğru aynı noktadan da geçmez. Eğer böyle olsa ortak noktaya sahip 4 düzlem olurdu ki bu ise hipotezimize ters düşer. Problem 16 dan dolayı $n+1$ inci düzlem bu *n* doğru tarafından $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ tane düzlemsel bölgeye ayrılır. Dolayısıyla uzayda $n+1$ inci düzlemin içinden geçtiği $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ tane 3 boyutlu bölge vardır. $n+1$ inci düzlem bu $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ tane 3 boyutlu bölgeyi ikiye böldüğünden önceki parçalanma sayısını $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ kadar artırır. Diğer bir deyişle $x_{n+1} - x_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$ dir. $n = 1, 2, ..., (k-1)$ değerlerini verip taraf tarafa toplarsak $\sum_{n=1}^{k-1} \left(x_{n+1} - x_n \right) = \sum_{n=1}^{k-1} \dfrac{n^2+n+2}{2}$ olur. Toplam sembolünün özelliklerini kullanarak $x_k - x_1 = \dfrac{k(k-1)(2k-1)}{12} + \dfrac{k(k-1)}{4} + (k-1)$ buluruz. Buradan $x_k = \dfrac{k^3+5k+6}{6}$ elde edilir. Sonuç olarak *n* tane düzlem 3 boyutlu uzayı en fazla $\dfrac{n^3+5n+6}{6}$ parçaya ayırır.

Problem 27: *n* tane küre 3 boyutlu uzayı en fazla kaç parçaya böler?

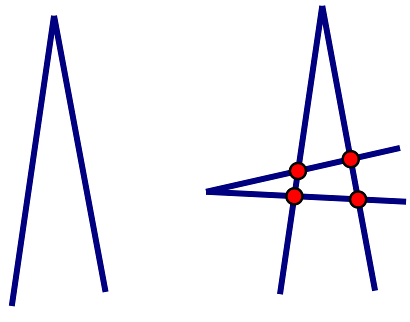
Çözüm: *n* tane küre uzayı en fazla x_n parçaya bölsün. $x_1 = 2$ olduğu açıktır. Böyle *n* tane kürenin çizilmiş olduğunu varsayalım. $n+1$ inci kürenin parçalanma sayısını ne kadar artırdığını belirleyeceğiz. Kürelerin uzayı en fazla sayıda parçaya ayırması için seçilen herhangi iki küre çifti bir çember boyunca kesişmelidir. Oluşan çemberlerin hepsi birbirinden farklı olmalı. Ayrıca teğet ya da ayrık durumda çember çifti olmamalıdır. Böylece $n+1$ inci kürenin önceki kürelerle kesişiminden birer çember oluşur ve bu kürenin yüzeyinde tam *n* tane çember vardır. Tıpkı düzlemin çemberlerle bölünmesi probleminde olduğu gibi kürenin yüzeyi n çember ile en fazla n^2-n+2 bölgeye ayrılır (bkz. Problem 25). Bu n^2-n+2 tane küre yüzeyi parçasının her biri, içinde bulunduğu 3 boyutlu bölgeyi iki parçaya ayırır. Yani bu bölgelerin sayısını n^2-n+2 tane artırır. Dolayısıyla $x_{n+1}-x_n=n^2-n+2$ dir. Şimdi $n=1,2,...,(k-1)$ değerlerini verip taraf tarafa toplarsak $\sum_{n=1}^{k-1}\left(x_{n+1}-x_n\right)=\sum_{n=1}^{k-1}n^2-n+2$ olur. Toplam sembolünün özelliklerini kullanırsak $x_k-x_1=\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}-\frac{k(k-1)}{2}+2.(k-1)$ olur. Buradan $x_k=\frac{k^3-3k^2+8k}{3}$ elde edilir. Sonuç olarak n tane küre 3 boyutlu uzayı en fazla $\frac{n(n^2-3n+8)}{3}$ parçaya ayırır.

Problem 28: n tane doğru bir daireyi en fazla kaç parçaya ayırır?

Yol Gösterme: n tane doğru bir daireyi en fazla x_n parçaya bölsün. $x_{n+1}-x_n=n+1$ olduğunu göstererek başlayınız.

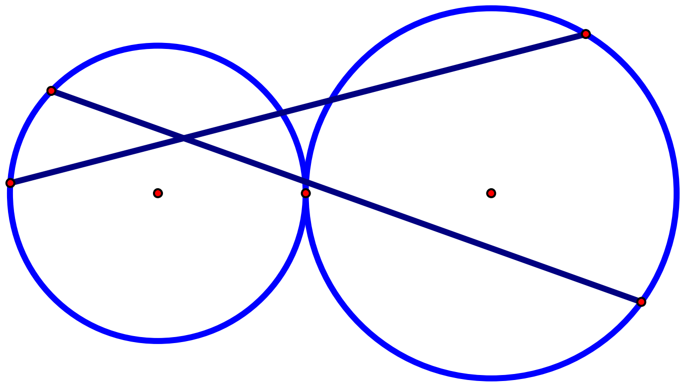
Problem 29: n tane bir yerinden kırık doğruyla düzlem en fazla kaç parçaya ayrılır?

Çözüm: n tane kırık doğru düzlemi en fazla x_n parçaya bölsün. Her bir kırık doğru diğerini en fazla 4 farklı noktada kesecek şekilde çizebiliriz. Dolayısıyla n + 1 inci kırık doğru kendinden öncekileri 4n tane noktada keser. Oluşan nokta sayısının 1 fazla kadar yeni bölge oluşacağından $x_{n+1}-x_n=4n+1$ bağıntısı vardır. $x_1=2$, $x_2=7$ olduğunu basit bir çizimle görebiliriz. $\sum_{n=1}^{k-1}\left(x_{n+1}-x_n\right)=\sum_{n=1}^{k-1}\left(4n+1\right)$ teleskopik toplamından $x_k=2k^2-k+1$ elde ederiz. Yani n tane kırık doğru için $x_n=2n^2-n+1$ tane bölge oluşur.



Problem 30: : n tane doğru birbirine teğet iki daireyi en fazla kaç parçaya ayırır?

Çözüm:



n tane doğru birbirine teğet olan iki daireyi en fazla x_n parçaya bölsün. $x_1 = 4$ olduğunu görmek kolaydır. Parçalanma sayısının en fazla olması için doğruların kesişim noktası çemberlerden birinin içine düşecek şekilde çizelim. Ayrıca çizdiğimiz herhangi bir doğru, her bir çemberi ikişer parçaya ayırmalıdır.

Şimdi n doğrunun çizilmiş olduğunu varsayalım. $n+1$ inci doğrunun, dairelerin içinde kalan kısmı, önceki n doğru ve iki çember tarafından $n+2$ parçaya ayrılır. Bu $n+2$ parça yardımıyla yeni $n+2$ bölge oluşur. Böylece $x_{n+1} - x_n = n+2$ olup $x_1 = 4$ başlangıç koşulu yardımıyla $x_n = \dfrac{n^2+3n+4}{2}$ bulunur. Yani n tane doğru birbirine teğet iki daireyi en fazla $\dfrac{n^2+3n+4}{2}$ parçaya ayırır.

KAYNAKÇA:

[1] *Matematik Dünyası Dergileri, Türk Matematik Derneği*

[2] *İndirgemeli Diziler, Türk Matematik Derneği*

[3] *Ulusal Matematik Olimpiyatı Sınavı Soru Kitapçıkları 1996 – 2010*

[4] *Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatları Soru ve Çözümler 1996 – 2005, TÜBİTAK*

[5] *IMO Shortlist Problemleri*

[6] *Yaglom, A.M., Yaglom, I.M., Challenging Mathematical Problems Volume 1*

[7] *Gökçe, L., Olimpiyat Ders Notları*