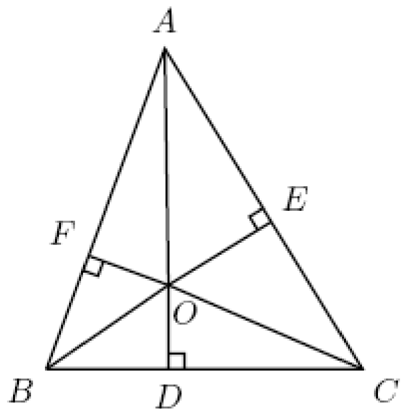
Erdös-Mordel Teoreminin Farklı Bir İspatı

Hajoo Lee

Teorem:

Verilen bir ABC üçgeninin içinden alınan bir O noktasından üçgenin kenarlarına inilen dikmeler OD,OE ve OF olsun.Bu durumda (OA+OB+OC) $\geq$ 2(OD+OE+OF) dir.
Eşitlik ancak ve ancak ABC üçgeninin eşkenar olması halinde gerçekleşir.



(Şekil 1.)

Bu teorem 1935 yılında Paul Erdös tarafından tahmin edilmiş ve ilk olarak aynı yıl içerisinde Louis Mordell tarafından ispatlanmıştır. Teoremin birçok kanıtı bulunmakla birlikte bu yazının amacı Ptolemy teoremini kullanarak elementer bir kanıt sunmaktır.

Kanıt:

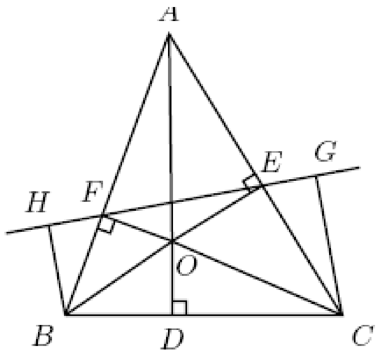
BC nin FE doğrusu üzerindeki dik izdüşümü HG olsun.(Şekil2. inceleyiniz.)

BC $\geq$ HG=HF+FE+EG eşitsizliğini elde ederiz. $\angle BFH = \angle AFE = \angle AOE$ olduğundan

ΔBFH *ve* ΔAOE üçgenleri benzer ve dolayısıyla $HF = \dfrac{OE}{OA}.BF$ dir. Benzer şekilde

$\Delta EGC \cong \Delta AFO$ olup $EG = \dfrac{OF}{OA}.CE$ dir. AFOE dörtgeninde Ptolemy teoremini uygularsak;

OA. FE=AF. OE+AE. OF $\Rightarrow$FE=$\dfrac{AF.OE+AE.OF}{OA}$ eşitliğini elde ederiz. Üste bulduğumuz değerleri son bulduğumuz eşitlikle birleştirelim.



BC$\geq \dfrac{OE}{OA}.BF+\dfrac{AF.OE+AE.OF}{OA}+\dfrac{OF}{OA}.CE$

$\Rightarrow$ BC. OA$\geq$ OE. BF+AF. OE+AE. OF+OF. CE=OE. AB+OF. AC

Eşitsizlikte her iki tarafı BC ye bölersek OA$\geq \dfrac{AB}{BC}.OE+\dfrac{AC}{BC}OF$ ..(1) eşitsizliğini elde ederiz
Benzer işlemleri diğer kenarlar için uygularsak;

OB$\geq \dfrac{BC}{CA}.OF+\dfrac{BA}{CA}.OD\ldots$(2) ve OC$\geq \dfrac{CA}{AB}.OD+\dfrac{CB}{AB}.OE$ $\ldots$(3) olur.

(1) ,(2) ve (3) eşirsizliklerini taraf tarafa toplayalım.

OA+OB+OC$\geq (\dfrac{BA}{CA}+\dfrac{CA}{BA}).OD+(\dfrac{AB}{BC}+\dfrac{BC}{AB}).OE+(\dfrac{AC}{BC}+\dfrac{BC}{AC}).OF$

x ve y pozitif reel sayılar olmak üzere $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 2$ özelliğinden
OA+OB+OC$\geq$2(OD+OE+OF) eşitsizliğine ulaşırız.

Çeviri: H.İbrahim AYANA
www.geomania.org