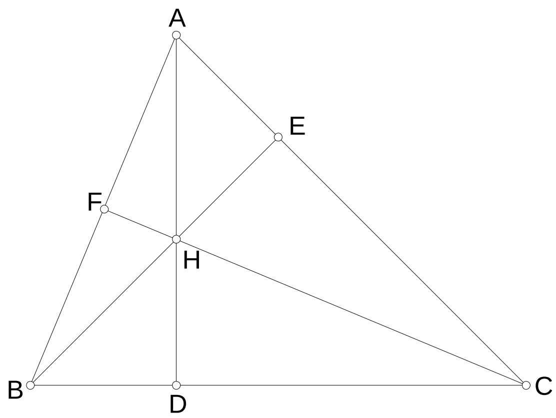
IMO 2008 Problem 1: $\triangle ABC$'nin diklik merkezi H, $[BC]$ kenarının orta noktası Z olmak üzere merkezi Z olan ve H noktasından geçen çember $[BC]$ kenarını K, L noktalarında kesiyor. Benzer şekilde $[AC]$, $[AB]$ kenarlarının orta noktaları I, J olmak üzere I, J merkezli ve H noktasından geçen çemberlerin $[AC]$, $[AB]$ kenarlarını kestiği noktalar sırasıyla M, N ve O, P olsun. K, L, M, N, O, P noktalarının aynı çember üzerinde bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm (L. Gökçe): Öncelikle aşağıdaki yardımcı teoremi kanıtlayalım.

Lemma: Yükseklik ayakları D, E, F ve diklik merkezi H olan $\triangle ABC$'de $|AD|.|HD| = |BD|.|DC|$ eşitliği sağlanır.

Lemma'nın Kanıtı: $\angle ACD = \angle BHD$ olduğundan bu açıların tanjantları da eşittir. Buna göre $\tan\angle ACD = \tan\angle BHD \Rightarrow \dfrac{|AD|}{|DC|} = \dfrac{|BD|}{|DH|} \Rightarrow |AD|.|HD| = |BD|.|DC|$ bulunur.



Şimdi ana problemimize dönelim. $\triangle ABC$'nin kenar uzunlukları a, b, c ve çevrel merkezi X olsun. Çevrel yarıçap uzunluğunu da R ile gösterelim. $\triangle XIC$ ve $\triangle XZC$ dik üçgenlerinde $|XI|^2 = R^2 - \dfrac{b^2}{4}$ ve $|XZ|^2 = R^2 - \dfrac{a^2}{4}$ olur. Biz, $|XN| = |XL|$ olduğunu kanıtlayacağız.

$$|XN| = |XL| \Leftrightarrow |XN|^2 = |XL|^2 \Leftrightarrow |XI|^2 + |IL|^2 = |XZ|^2 + |ZL|^2 \Leftrightarrow |XI|^2 + |IH|^2 = |XZ|^2 + |ZH|^2$$

$\Leftrightarrow R^2 - \dfrac{b^2}{4} + |IH|^2 = R^2 - \dfrac{a^2}{4} + |ZH|^2 \Leftrightarrow |IH|^2 + \dfrac{a^2}{4} = |ZH|^2 + \dfrac{b^2}{4}$ dir. Yani $|XN| = |XL|$ eşitliğini göstermek için,

$$|IH|^2 + \frac{a^2}{4} = |ZH|^2 + \frac{b^2}{4} \quad \dots (1)$$

olduğunu göstermek gerekli ve yeterlidir.

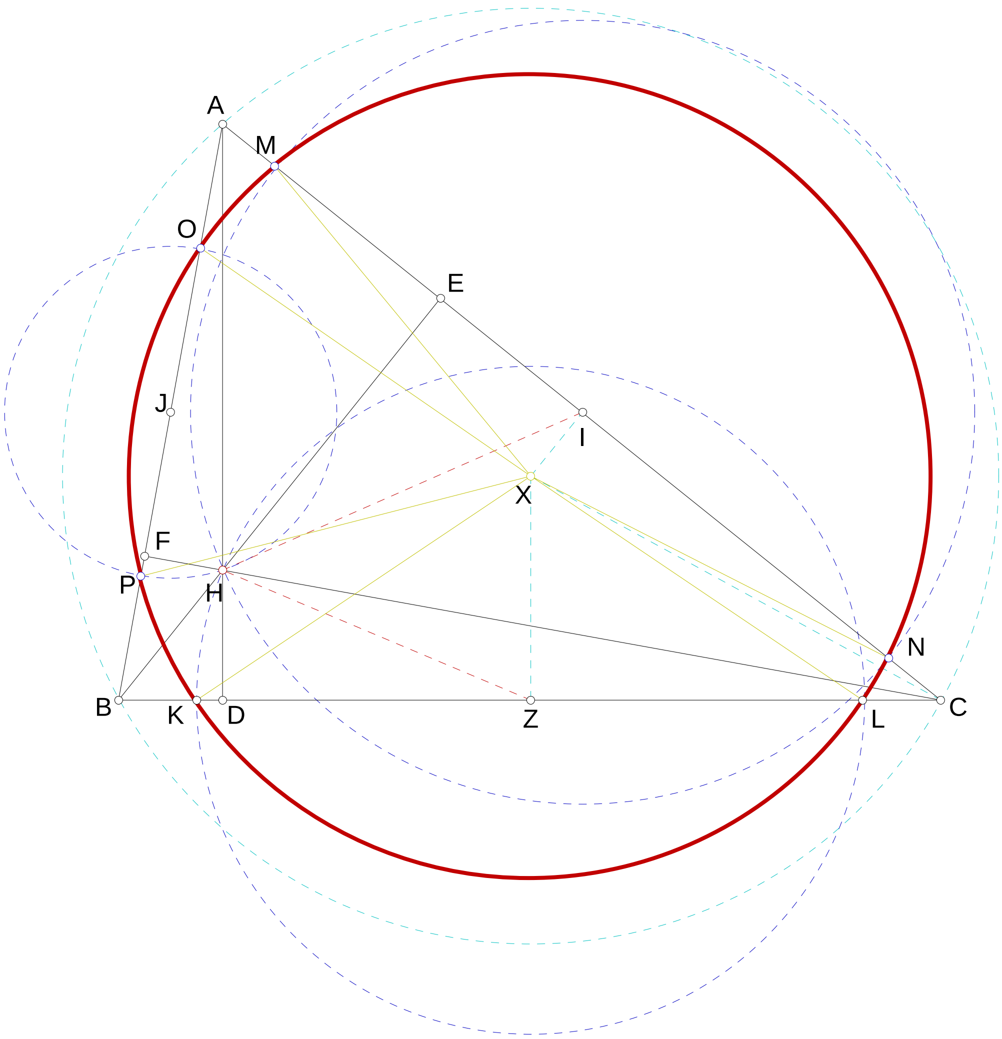
Şimdi aşağıdaki şekli takip edelim. $|BD| = x$, $|DC| = a - x$ olsun. $|AD|^2 = c^2 - x^2$ ve $|AD|^2 = b^2 - (a-x)^2$ olduğundan $c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$ olup $c^2 - x^2 = b^2 - a^2 - x^2 + 2ax$ dir. Buradan

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad \ldots (2)$$

olur. $|DC| = a - x = a - \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$ dir. Buradan,

$$|DZ| = |DC| - |ZC| = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} - \frac{a}{2} = \frac{b^2 - c^2}{2a} \ldots (3)$$

eşitliğine ulaşırız.



Diğer taraftan Lemma'dan dolayı $|AD|.|HD| = x.(a-x)$ dir. $|AD| = \sqrt{c^2 - x^2}$ olduğundan $|HD| = \dfrac{x.(a-x)}{\sqrt{c^2-x^2}}$ dir. Burada (2) yardımı ile $|HD|$'nin değerinin, yalnızca *a*, *b*, *c* uzunlukları türünden ifade edilebileceğine dikkat edelim. Böylece $|HZ|^2 = |HD|^2 + |DZ|^2$'den

$$|HZ|^2 = \frac{x^2.(a^2 + x^2 - 2ax)}{c^2 - x^2} + \left(\frac{b^2 - c^2}{2a}\right)^2 \quad \dots (4)$$

elde ederiz. (2) yardımı ile $|HZ|^2$ ifadesinin yalnızca, *a*, *b*, *c* uzunlukları türünden ifade edilebileceğini de söyleyebiliriz.

$|AE| = y$ diyelim. Benzer yöntemle

$$y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \quad \dots (5)$$

ve $|IH|^2 = |EH|^2 + |IE|^2$ olup

$$|IH|^2 = \frac{y^2.(b^2 + y^2 - 2by)}{c^2 - b^2} + \left(\frac{a^2 - c^2}{2b}\right)^2 \quad \dots (6)$$

buluruz. (5) yardımı ile $|IH|^2$ ifadesini yalnızca, *a*, *b*, *c* uzunlukları türünden ifade etmek mümkündür.

Sonuç olarak (4) ve (6) eşitlikleri kullanılarak, (1)'deki $|IH|^2 + \dfrac{a^2}{4} = |ZH|^2 + \dfrac{b^2}{4}$ eşitliğinin sağlandığını görebiliriz. (Bunun için parantezleri açmamız yeterlidir) Dolayısıyla $|XN| = |XL|$ dir. Benzer akıl yürütme ile $|XM| = |XO|$, $|XP| = |XK|$ olduğunu da gösterebiliriz. Bunlarla birlikte çok kolayca görülebilecek $|XN| = |XM|$, $|XO| = |XP|$, $|XK| = |XL|$ eşitliklerini de göz önüne alırsak $|XN| = |XM| = |XO| = |XP| = |XK| = |XL|$ eşitliklerine ulaşırız. *X* merkezli ve $|XN|$ yarıçaplı çemberi çizersek bu çember aynı zamanda *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P* noktalarından geçer.