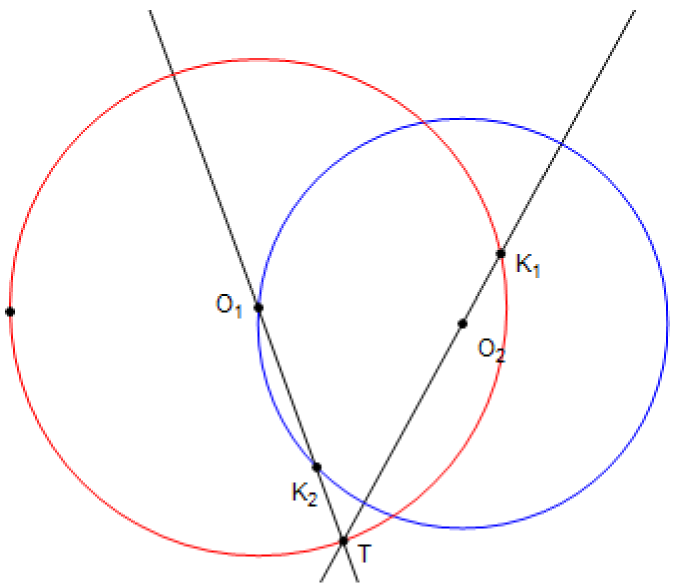
1. O_1 merkezli R_1 yarıçaplı $Ç_1$ çemberi ile O_2 merkezli R_2 yarıçaplı ve O_1 noktasından geçen $Ç_2$ çemberi veriliyor. $Ç_1$ üzerinde , $O_2T \cap Ç_1 = \{K_1\}$, $O_1T \cap Ç_2 = \{K_2\}$ ve $|O_2K_1| = |K_2T|$ olacak şekilde bir T noktası alınıyor. Buna göre $|O_2T|$, $|K_1T|$ uzunluklarından birinin R_1 e eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Çemberlerin birbirine göre durumlarını inceleyelim. İlk durumda $R_1 \geq R_2$ durumunu ele alalım. $\widehat{O_2O_1T} \geq 90°$ olduğu takdirde $|O_2K_1| < |K_2T|$ olacağından bir çözüm elde edemeyiz. Diğer durumda aşağıdaki gibi bir şekil elde ederiz.



Tüm çözümlerimizde O_2 nin $Ç_1$ e göre kuvveti ile T nin $Ç_2$ ye göre kuvvetini alacağız.

O_2 nin $Ç_1$ e göre kuvvetinden $R_1{}^2 - O_2T.O_2K_1 = R_2{}^2$

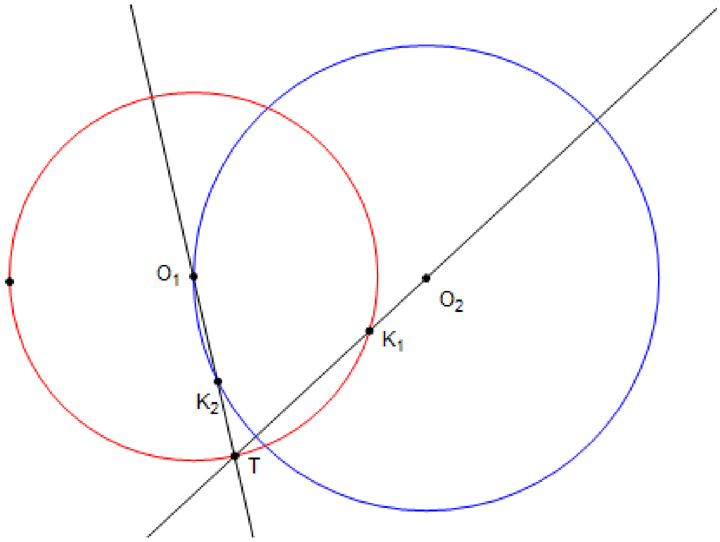
T nin $Ç_2$ ye göre kuvvetinden $K_2T.R_1 = O_2T^2 - R_2{}^2$ elde edilir. Taraf tarafa toplayıp $|O_2K_1| = |K_2T|$ eşitliğini uygularsak,

$R_1{}^2 + (R_1 - O_2T).O_2K_1 = O_2T^2 \Rightarrow (R_1 - O_2T)(R_1 + O_2T + O_2K_1) = 0$ elde edilir.

Buradan $\boxed{R_1 = O_2T}$ sonucu çıkar.

$R_1 < R_2$ durumunda ise T ve K_2 nin O_1 e yakınlığına göre iki farklı çözüm yapacağız.

$R_1 < R_2$ ve $O_1K_2 < R_1$ olduğunda aşağıdaki şekli elde ederiz. Yine O_2 nin $Ç_1$ e göre kuvveti ile T nin $Ç_2$ ye göre kuvvetini alacağız.



O_2 nin $Ç_1$ e göre kuvvetinden $O_2T.O_2K_1 = {R_2}^2 - {R_1}^2$

T nin $Ç_2$ ye göre kuvvetinden $K_2T.R_1 = O_2T^2 - {R_2}^2$ elde edilir. Taraf tarafa toplayıp $|O_2K_1| = |K_2T|$ eşitliğini uygularsak,

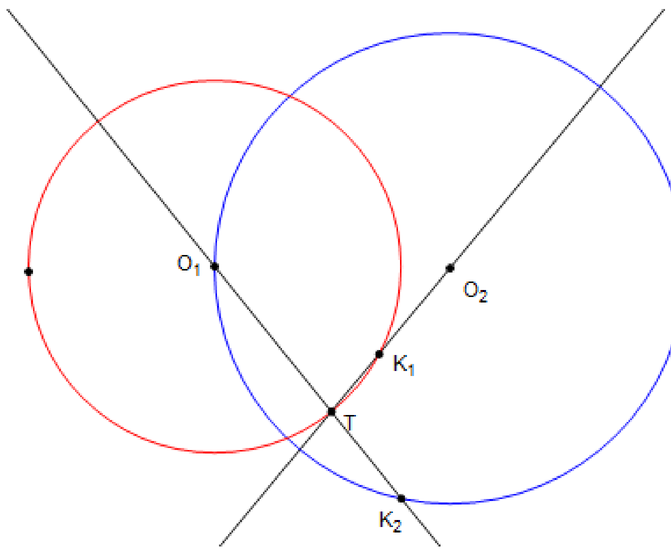
$O_2T^2 - {R_1}^2 = (R_1 + O_2T).TK_2 \Rightarrow O_2T - R_1 = TK_2 \Rightarrow O_2T - O_2K_1 = \boxed{K_1T = R_1}$ elde edilir.

$R_1 < R_2$ ve $O_1K_2 > R_1$ olduğu durum için O_2 nin $Ç_1$ e göre kuvveti ile T nin $Ç_2$ ye göre kuvvetini alırsak;

O_2 nin $Ç_1$ e göre kuvvetinden $O_2T.O_2K_1 = {R_2}^2 - {R_1}^2$

T nin $Ç_2$ ye göre kuvvetinden $K_2T.R_1 = {R_2}^2 - O_2T^2$ elde edilir.

$TK_2.R_1 - {R_1}^2 = O_2K_1.O_2T - O_2T^2 \Rightarrow (R_1 - O_2T)(R_1 + O_2T - TK_2) = 0$ ifadesinde ikinci terim her zaman sıfırdan büyük olacağından $\boxed{R_1 = O_2T}$ elde edilir.



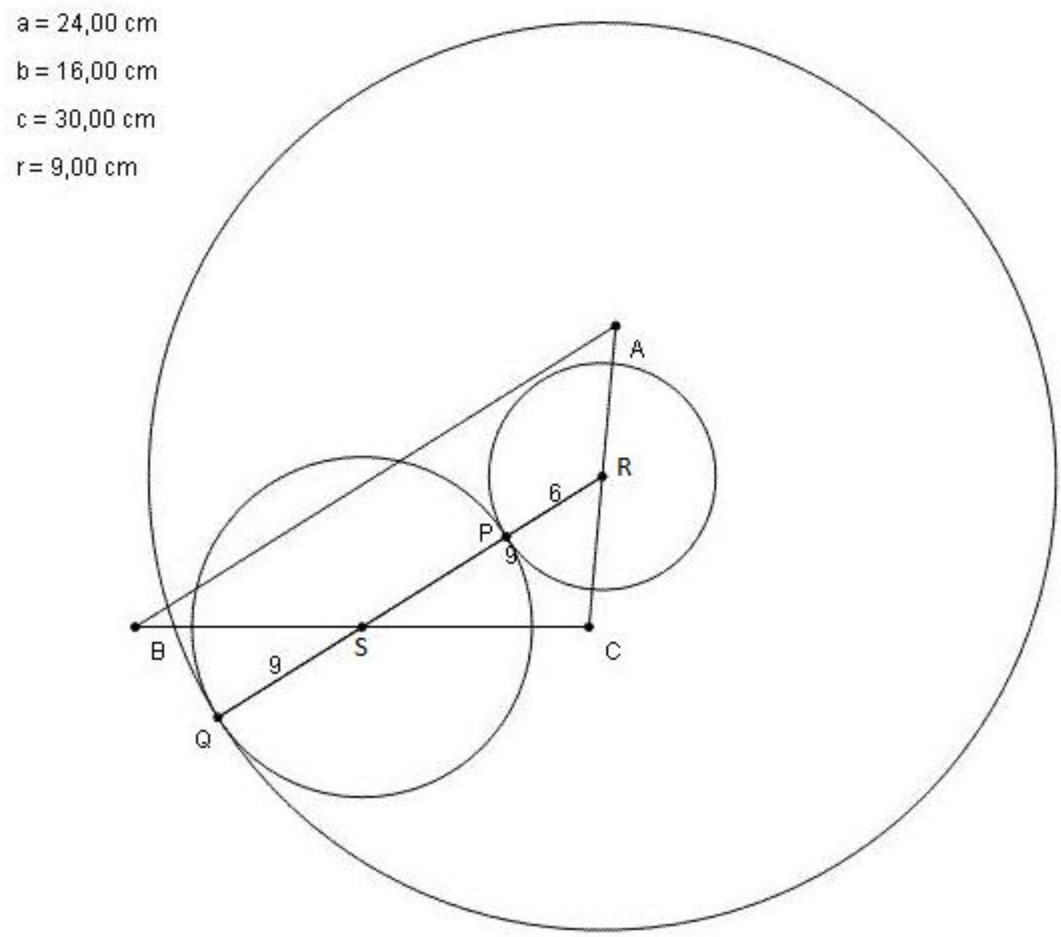
2. $|AB| = 30$, $|BC| = 24$ ve $|AC| = 16$ olacak şekilde A, B ve C noktaları alınıyor. $|BX|^2 + |CX|^2 = 450$ ve $\left||BX|^2 - |AX|^2\right| = M$ şartlarını sağlayan ve ABC düzleminde yer alan tam olarak bir tane X noktası varsa M nin alabileceği değerleri belirleyiniz.

Çözüm:

R ve S sırasıyla AB ve BC nin orta noktaları olsun. $|BX|^2 + |CX|^2 = 450$ denklemini sağlayan X lerin geometrik yeri S merkezli 9 yarıçaplı çemberdir. Kenarortay teoreminden

$$r^2 = \frac{BX^2}{2} + \frac{CX^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{450}{2} - \frac{16^2}{4} = 81 \Rightarrow r = 9.$$

Gerçekten de çember üzerinde alından her nokta için kenarortay teoremini uygularsak $|BX|^2 + |CX|^2 = 450$ eşitliğini elde ederiz.



Uzaklıkların kareleri toplamı sabitken geometrik yer çember olurken, kareler farkı sabit ise geometrik yer dik bir doğru olur. Biraz cebirler kareler farkını kareler toplamı haline getirip problemin çözümünü daha estetik kılalım.

$\left||BX|^2 - |AX|^2\right| = M$ eşitliğinden $AX^2 - BX^2 = \pm M$ elde edilir. $|BX|^2 + |CX|^2 = 450$ ile taraf tarafa toplarsak $AX^2 + CX^2 = 450 \pm M$ elde ederiz. Bu denklemi de R merkezli bir çember sağlar. Bu çemberler S merkezli çember ile ya hiç kesişmez, ya bir noktada kesişir ya da iki noktada kesişir. Soruda bizden istenen tek noktada kesişen çemberler. Yani R merkezli çemberin S merkezli 9 yarıçaplı çembere teğet olması gerekir. Şekilden de takip edebileceğiniz gibi bu özelliği sağlayan biri iç teğet, diğeri dış teğet olmak üzere iki farklı çember vardır. Çemberlerin teğet noktaları iç teğet için P, dış teğet için Q olsun. MN, orta noktaları birleştiren doğru olduğu için $MN = \frac{AB}{2} = 15$, buradan da $PN = 15 - 9 = 6$ ve $QN = 15 + 9 = 24$ çıkar.

NP yarıçaplı çember için; $6^2 = \frac{AX^2}{2} + \frac{CX^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Rightarrow AX^2 + CX^2 = 200$ ve

NQ yarıçaplı çember için kenarortay teoremini uygularsak; $AX^2 + CX^2 = 1280$ elde edilir. Buradan da $450 - M = 200 \Rightarrow \boxed{M = 250}$ ve $450 + M = 1280 \Rightarrow \boxed{M = 830}$ çıkar.

3. $ABCDE$ kirişler beşgeninde $[BE \cap [CD = \{P\}$, $BE \cap AD = \{F\}, BE \cap AC = \{G\}$ ve $|EF|.|PG| = |PE|.|BG|$ ise $|AB| = |AE|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Soruyu çift yönlü yani $EF.PG = PE.BG \Leftrightarrow AB = AE$ olarak düşünerek daha genel bir şekilde çözelim.

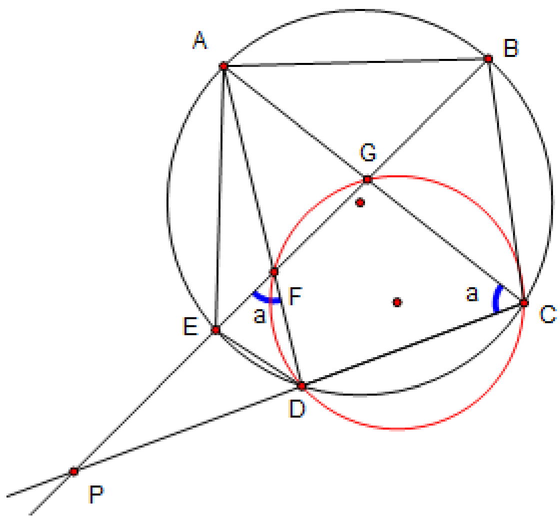
$EF.PG = PE.BG \Leftrightarrow (PF - PE).PG = PE.(PB - PG) \Leftrightarrow PF.PG = PE.PB$

P noktasının çembere göre kuvvetinden $PE.PB = PD.PC$ elde edilebileceğine göre

$EF.PG = PE.BG \Leftrightarrow PF.PG = PD.PC \Leftrightarrow F, D, C, G, çemberseldir.$

F, D, C, G çemberseldir $\Leftrightarrow \widehat{DCG} = \widehat{PFD} \Leftrightarrow \widehat{AD} = \widehat{AE} + \widehat{ED} = \widehat{ED} + \widehat{AB} \Leftrightarrow AB = AE.$

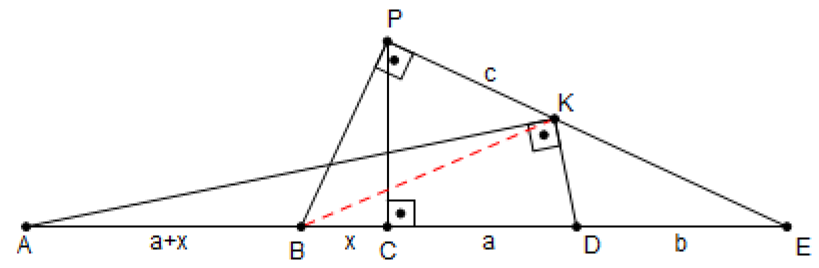
Bu durumda $EF.PG = PE.BG \Leftrightarrow AB = AE$ elde edilir.



4. Bir doğru üzerinde sırasıyla A, B, C, D ve E $(|AB| = |BD|)$ noktaları ve bu doğruya C noktasında dik olan başka bir doğru üzerinde $B\widehat{P}E = 90$ olacak şekilde bir P noktası alınıyor. $K \in [PE]$ ve $A\widehat{K}D = 90$ olmak üzere $[PK], [CD]$ ve $[DE]$ dan herhangi ikisinin uzunluğu birbirine eşitse üçüncüsünün uzunluğunun da diğer ikisine eşit olacağını gösteriniz.

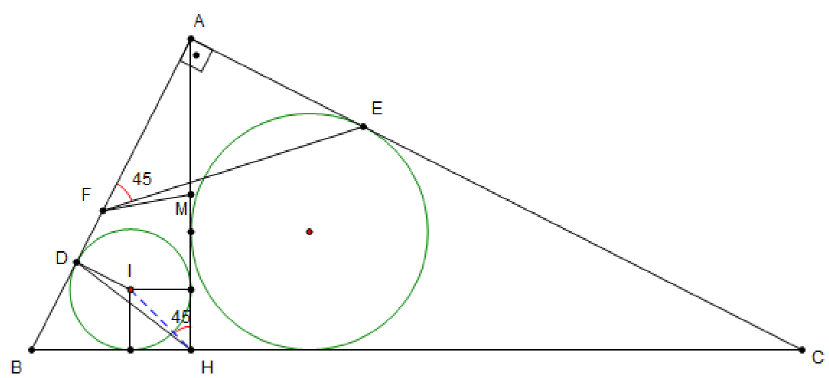
Çözüm:

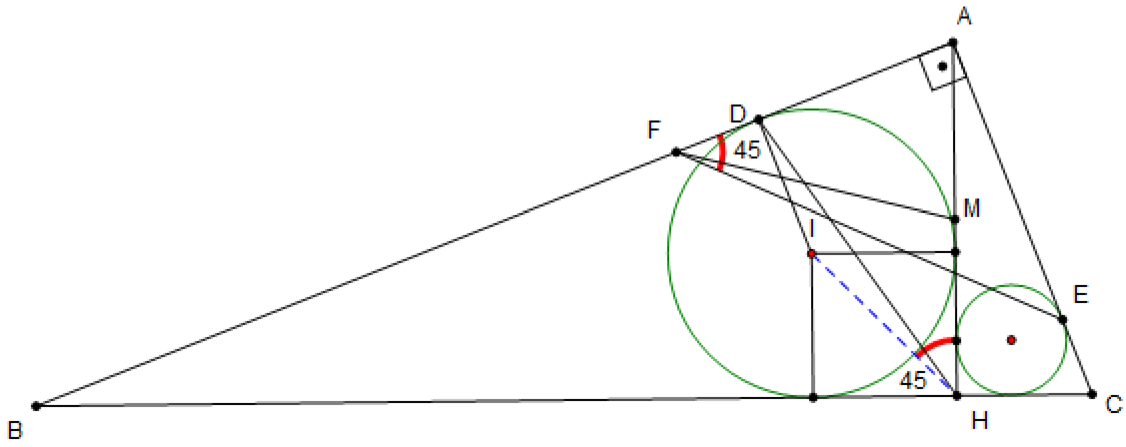
$CD = a, DE = b, PK = c, BC = x$ olsun. Bu durumda $AB = a + x, BK = a + x$ ve $PB^2 = x(a + b + x)$ olacaktır. ΔPCK da pisagordan $PB^2 + PK^2 = BK^2$ eşitliğinde bulduğumuz değerleri yerine yazarsak, $ax + bx + x^2 + c^2 = (a + x)^2$ denklemini elde ederiz. Biraz çarpanlara ayırma ile $x(b - a) = (a - c)(a + c)$ elde edilir. $a = b \Leftrightarrow a = c$ olduğu aşikar. $b = c$ durumunda ise ya $a = c$ ya da sol taraf ile sağ taraf ters işaretli olacak. Bu durumda a, b, c uzunluklarından ikisinin eşitliği halinde üçüncüsünün de eşitliğinden söz edilir.



5. ABC dik üçgeninde AH hipotenüse ait yükseklik olsun. ABH üçgeninin içteğet çemberi AB kenarına D noktasında, ACH üçgeninin içteğet çemberi AC kenarına E noktasında teğet olsun. I, ABH üçgenin iç merkezi ve M, AH doğru parçasının orta noktası olmak üzere; E noktasının BAC açısının iç açıortayına göre simetriği F noktası ise $\angle MFE = \angle DHI$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:





Lemma: ABC dik üçgeninde içteğet çemberi BC hipotenüsüne D de dokunuyorsa, $Alan(ABC) = BD.DC$ dir.

İspat: Dik üçgende $r = u - a$ olacağından,

$\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} = \sqrt{ur(u-b)(u-c)} = ur \Rightarrow (u-b)(u-c) = ur = [ABC]$

Sorunun çözümüne geri dönersek,

Benzerlikten $\Delta BAH \approx \Delta ACH \Leftrightarrow \frac{BD}{AE} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = \frac{AH.BD}{AE}$. Yukarıdaki lemmadan $[ABH] = \frac{AH.BH}{2} = BD.AD \Rightarrow AH.\frac{\frac{AH.BD}{AE}}{2} = BD.AD \Rightarrow AH.AM =$ $AD.AF \Rightarrow D, M, H, F$ $çemberseldir.$

ΔAFE ikizkenar, $\widehat{IHA} = 45°$ ve $\widehat{AFM} = \widehat{DHM}$ olduğundan $\angle MFE = \angle DHI$ elde edilir.