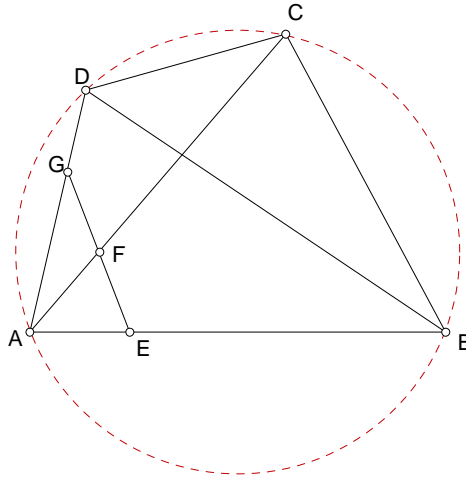


PTOLEMY EŞİTSİZLİĞİ ÜZERİNE (L. Gökçe)

Geometrideki ilginç eşitsizliklerinden biri de *Ptolemy Eşitsizliği* dir. Bu yazımızda Ptolemy eşitsizliğini ve birkaç uygulamasını sunacağız.

SORU 1: A, B, C, D herhangi dört farklı nokta ise $|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$ olduğunu gösteriniz. Ayrıca eşitlik durumu ne zaman sağlanır? (Ptolemy Eşitsizliği)

ÇÖZÜM: E, F, G noktaları sırasıyla $[AB], [AC], [AD]$ ışınları üzerinden $|AE| \cdot |EB| = |AF| \cdot |AC| = |AG| \cdot |AD| = k$ olacak şekilde alınsın. $\triangle AFE \sim \triangle ABC$, $\triangle AFG \sim \triangle ADC$, $\triangle AEG \sim \triangle ADB$ olup buradan $|EF| = \frac{|BC| \cdot k}{|AB| \cdot |AC|}$, $|FG| = \frac{|CD| \cdot k}{|AC| \cdot |AD|}$, $|EG| = \frac{|BD| \cdot k}{|AB| \cdot |AD|}$ yazılır. $\triangle EFG$ de üçgen eşitsizliğinden $|EG| \leq |EF| + |FG|$ olur. Bu eşitsizlik ise $|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$ ifadesine denktir. $|EG| = |EF| + |FG|$ eşitliği E, F, G doğrusal olduğunda sağlandığından $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$ eşitliği sadece $ABCD$ bir kirişler dörtgeni iken sağlanır.



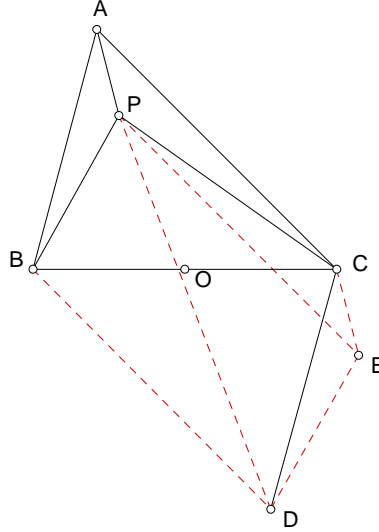
Şekil 1

SORU 2: $\triangle ABC$ de $\angle BAC = 60^\circ$ olsun. Üçgenin içinden $|PA| = 1$, $|PB| = 2$, $|PC| = 3$ olacak şekilde bir P noktası alalım. $\triangle ABC$ nin alanının alabileceği en büyük değeri bulunuz. (Romanya Takım Seçme Sınavı 1999)

ÇÖZÜM: $ABDC$ ve $APEC$ paralelkenarlarını çizelim. Bu halde $PEDB$ de bir paralelkenar olup $|CE| = |AP| = 1$, $|DE| = |BP| = 2$ dir. $Alan(ABC) = \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |CD| \cdot |PE|$ olur. $\triangle ABC$

nin alanının en büyük olması için $|CD| \cdot |PE|$ çarpımını en büyük olmalıdır. O halde $PCED$ dörtgeninde Ptolemy eşitsizliğini uygularsak $|CD| \cdot |PE| \leq |PC| \cdot |DE| + |PD| \cdot |CE|$ olup

$$|CD| \cdot |PE| \leq 6 + |PD| \dots (1)$$



Şekil 2

elde edilir. $ABDC$ paralelkenarının köşegenlerinin kesişme noktası O olsun. $\triangle ADP$ ve $\triangle BCP$ de $[PO]$ kenarortay olduğundan $2|PO|^2 = |AP|^2 + |PD|^2 - \frac{|AD|^2}{2}$ ve $2|PO|^2 = |BP|^2 + |PC|^2 - \frac{|BC|^2}{2}$ dir. Bu eşitliklerden

$$|AP|^2 + |PD|^2 - |BP|^2 - |PC|^2 = \frac{|AD|^2}{2} - \frac{|BC|^2}{2} \dots (2)$$

yazılır. $\triangle ABC$ de kosinüs teoreminden

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos 60^\circ \dots (3)$$

ve $ABCD$ de paralelkenar kanunundan:

$$|AD|^2 + |BC|^2 = 2 \cdot (|AB|^2 + |AC|^2) \dots (4)$$

olur. $\frac{|AD|^2}{2} - \frac{|BC|^2}{2}$ ifadesini hesaplamak için (3) ve (4) kullanılırsa

$$\frac{|AD|^2}{2} - \frac{|BC|^2}{2} = |AB| \cdot |AC| \dots (5)$$

elde edilir. (2) ve (5) ten

$$|PD|^2 = 12 + |AB| \cdot |AC| = 12 + |CD| \cdot |PE| \dots (6)$$

olup (1) ve (6) dan $|PD|^2 \leq 12 + 6 + |PD|$ bulunur. Buradan

$$|PD|^2 - |PD| - 18 \leq 0 \dots (7)$$

ikinci derece eşitsizliği elde edilir. (7) den $|PD| \leq \frac{1 + \sqrt{73}}{2}$ bulunur. Dolayısıyla

$$Alan(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |CD| \cdot |PE| \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6 + |PD|) \leq \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot (13 + \sqrt{73})$$
 sonucuna ulaşılır. $Alan(ABC)$, en

büyük değeri olan $\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot (13 + \sqrt{73})$ sayısına eşit olabilmesi için $PECD$ nin bir kirişler dörtgeni olması gerekmektedir. Diğer bir ifadeyle $\angle PCA = \angle PBA$ olmalıdır.

SORU 3: Dar açılı $\triangle ABC$ üçgeninin içinden rastgele bir D noktası alınıyor.

$|DA| \cdot |DB| \cdot |AB| + |DB| \cdot |DC| \cdot |BC| + |DC| \cdot |DA| \cdot |AC| \geq |AB| \cdot |BC| \cdot |AC|$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $BCDE$ ve $BCAF$ paralelkenarlarını oluşturalım. $EDAF$ de bir paralelkenar olur. Böylece $|AF| = |ED| = |BC|$, $|EF| = |AD|$, $|EB| = |CD|$, $|BF| = |AC|$ elde edilir. $ABEF$ ve $AEBD$ dörtgenlerinde Ptolemy eşitsizliği uygulanırsa $|AB| \cdot |EF| + |AF| \cdot |BE| \geq |BF| \cdot |AE|$ ve $|AE| \cdot |BD| + |AD| \cdot |BE| \geq |AB| \cdot |ED|$ olup

$$|AB| \cdot |AD| + |BC| \cdot |CD| \geq |AE| \cdot |AC| \dots (1)$$

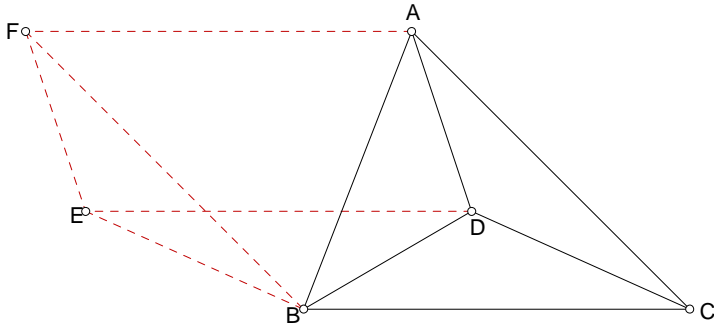
$$|BD| \cdot |AE| + |AD| \cdot |CD| \geq |AB| \cdot |BC| \dots (2)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (1) ve (2) yardımıyla

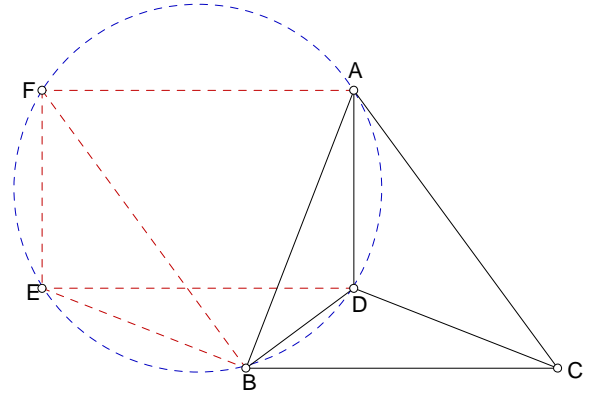
$$\begin{aligned} |DA| \cdot |DB| \cdot |AB| + |DB| \cdot |DC| \cdot |BC| + |DC| \cdot |DA| \cdot |AC| &= |DB| (|AB| \cdot |AD| + |BC| \cdot |CD|) + |DC| \cdot |DA| \cdot |AC| \\ &\geq |DB| \cdot |AE| \cdot |AC| + |DC| \cdot |DA| \cdot |AC| = |AC| (|BD| \cdot |AE| + |AD| \cdot |CD|) \geq |AC| \cdot |AB| \cdot |BC| \end{aligned}$$

bulunur.

Burada eşitlik durumu sadece, $ABEF$ ve $AEBD$ nin birer kirişler dörtgeni olması halinde sağlanır. (bkz Şekil 3 – B). Dolayısıyla $ADBEF$ beşgeni çembersel ve $ADEF$ paralelkenarı bir dikdörtgen olmalıdır. Buradan $AD \perp ED$ ve $EB \perp AB$ olup $AD \perp BC$, $CD \perp AB$ elde edilir. Böylelikle D , $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.



Şekil 3 - A



Şekil 3 - B

SORU 4: Dar açılı $\triangle ABC$ nin içinden

$|DA| \cdot |DB| \cdot |AB| + |DB| \cdot |DC| \cdot |BC| + |DC| \cdot |DA| \cdot |AC| = |AB| \cdot |BC| \cdot |AC|$ olacak şekilde bir D noktası alınıyor. D nin geometrik yerini belirleyiniz. (Çin Takım Seçme Sınavı 1998)

ÇÖZÜM: Genel olarak $|DA| \cdot |DB| \cdot |AB| + |DB| \cdot |DC| \cdot |BC| + |DC| \cdot |DA| \cdot |AC| \geq |AB| \cdot |BC| \cdot |AC|$

eşitsizliğinin olduğunu göstermiştik. Dolayısıyla bu problem, Soru 3'ün özel bir durumudur. D noktasının yeri, $\triangle ABC$ nin diklik merkezidir.

SORU 5: $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$ olan bir $ABCDEF$ altıgeninde

$\frac{|BC|}{|BE|} + \frac{|DE|}{|DA|} + \frac{|FA|}{|FC|} \geq \frac{3}{2}$ eşitsizliğini kanıtlayınız. Ayrıca eşitlik halinin ne zaman sağlanacağını belirleyiniz.

ÇÖZÜM: $|AC| = a$, $|CE| = b$, $|EA| = c$, $|EF| = |FA| = x$, $|CD| = |DE| = y$, $|AB| = |BC| = z$ diyelim.

$ACEF$, $ACDE$, $AECB$ dörtgenlerinde Ptolemy eşitsizliğini uygularsak $ax + bx \geq c \cdot |FC|$,

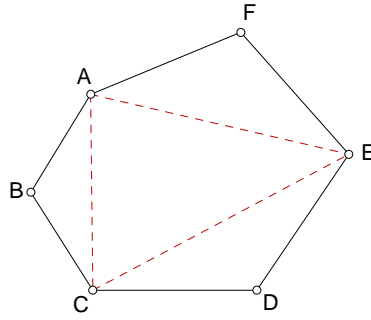
$ay + cy \geq b \cdot |DA|$, $bz + cz \geq a \cdot |BE|$ olup $\frac{|FA|}{|FC|} \geq \frac{c}{a+b}$, $\frac{|DE|}{|DA|} \geq \frac{b}{a+c}$, $\frac{|BC|}{|BE|} \geq \frac{a}{b+c}$ elde edilir. Eğer

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ olduğunu gösterirsek eşitsizlik kanıtlanmış demektir. $0 < x < s$ olmak üzere

$f(x) = \frac{s}{s-x}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f''(x) = \frac{s}{(s-x)^3} > 0$ olduğundan Jensen eşitsizliğinden

$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3}$ olur. Burada $s = a+b+c$ alınarak $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ olduğu

görülebilir. Eşitlik durumu ise $a = b = c$ olduğunda sağlanır.

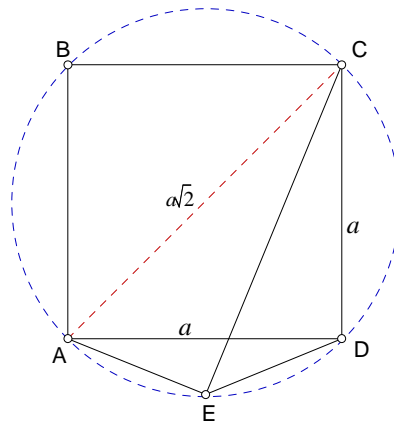


Şekil 5

Ayrıca Ptolemy eşitsizliğinde eşitlik durumu $ACEF$, $ACDE$, $AECB$ dörtgenlerinin her biri çembersel olduğunda sağlanır. Dolayısıyla $ABCDEF$ altıgeni de çembersel olmalıdır. Üstelik $a = b = c$ olması gerektiğinden $\frac{|BC|}{|BE|} + \frac{|DE|}{|DA|} + \frac{|FA|}{|FC|} = \frac{3}{2}$ eşitliğinin sağlanabilmesi ancak $ABCDEF$ nin düzgün altıgen olmasıyla mümkün olur.

SORU 6: $ABCD$ karesinin dışından, $ABCDE$ dışbükey beşgen olacak şekilde bir E noktası alalım. $|AE| = |ED| = 1$, $|EC| = \sqrt{2} + 1$ olduğuna göre $\angle ECD$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM: $ABCD$ karesinin bir kenar uzunluğu a olsun. $|AC| = a\sqrt{2}$ dir. $AEDC$ dörtgeninde Ptolemy eşitsizliğini uygularsak $|AE| \cdot |CD| + |AC| \cdot |ED| = |AD| \cdot |CE|$ eşitlik durumunun sağlandığını görürüz. Buna göre $AEDC$ bir kirişler dörtgeni olur. Dolayısıyla E noktası, $ABCD$ karesinin çevrel çemberi üzerindedir. Aynı uzunlukta kirişleri gören dar – çevre açıların ölçüleri eşit olduğundan $\angle ECD = \angle ACE = \frac{\angle ACD}{2}$ olup $\angle ECD = 22,5^\circ$ bulunur.



Şekil 6

KAYNAKÇA:

[1] Andreescu, T., Mushkarov, O., Stoyanov, L.,(2006), Geometric Problems on Maxima and Minima, Birkhauser,Boston, sayfa 97.

[2] Andreescu, T., Feng, Z., (2000), Mathematical Olympiads 1998-1999: Olympiad Problems from Around the World, The Mathematical Association of America, Washington, sayfa 31.

[3] Andreescu, T., Feng, Z., (2001), Mathematical Olympiads 1999-2000: Olympiad Problems from Around the World, The Mathematical Association of America, Washington.

[4] Gökçe, L., Geometri Ders Notları.