

MODÜLER ARİTMETİK

1. $3 \cdot x \equiv 4 \pmod{5}$; $2 \cdot x \equiv 7 \pmod{3}$ $4 \cdot x \equiv 6 \pmod{7}$ denkliklerini, $[100, 2000]$ aralığında kaç tane tamsayı sağlar?

Çözüm: $x \equiv 3 \pmod{5}$; $x \equiv 2 \pmod{3}$; $x \equiv 5 \pmod{7}$
 $x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 3, \boxed{8}, 13 \pmod{15}$ olabilir. $x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$
 $x \equiv 8 \pmod{15} \Rightarrow x \equiv 8, 23, 38, 53, \boxed{68}, 83, 98 \pmod{105}$ olabilir.
 $x \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 68 \pmod{105} \Rightarrow$
 $x_1 = 68 + 105 = 173, x_n = 1958. \Rightarrow \frac{1958 - 173}{105} + 1 = 18.$

2. $x^3 - 2x + 6 \equiv 0 \pmod{125}$ ve $0 \leq x < 125$ koşullarını sağlayan kaç x tam sayısı vardır? (UMO-2002)

Çözüm: $x^3 - 2x + 6 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 1, 2 \pmod{5}$
a) $x = 5y + 1 \Rightarrow (5y + 1)^3 - 2(5y + 1) + 6 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow$
 $125y^3 + 75y^2 + 15y + 1 - 10y - 2 + 6 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow$
 $5y \equiv -5 \pmod{25} \Rightarrow y \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 5 \cdot 4 + 1 \equiv 21 \pmod{25}$
b) $x = 5z + 2 \Rightarrow (5z + 2)^3 - 2(5z + 2) + 6 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow$
 $60z + 8 - 10z - 4 + 6 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow 50y \equiv -10 \pmod{25} \Rightarrow$
 $0 \equiv -10 \pmod{25} \Rightarrow$ Çelişki!
 $\Rightarrow x = 25u + 21 \Rightarrow (25u + 21)^3 - 2(25u + 21) + 6 \equiv 0 \pmod{125} \Rightarrow$
 $75 \cdot 441u + 21^3 - 50u - 42 + 6 \equiv 0 \pmod{125} \Rightarrow 25u \equiv 25 \pmod{125} \Rightarrow$
 $u \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 25 \cdot 1 + 21 \equiv 46 \pmod{125} \Rightarrow$
Sadece $x = 46$ sağlar.

3. n asal sayı değilse, $2^n - 1$ 'in de asal olmadığını gösteriniz. (PSS131.10)

Çözüm: $n = m \cdot k (m, k > 1) \Rightarrow (2^m - 1) \mid (2^n - 1) \Rightarrow 2^n - 1$ asal değildir.

4. Her $0 \leq i \leq 9$ için $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere,

$$6 \cdot \sum_{i=0}^9 a_i 5^i \equiv 1 \pmod{5^{10}} \text{ ise, } a_9 \text{ kaçtır? (UMO-1999)}$$

Çözüm: $(a_9 a_8 \dots a_2 a_1 a_0)_5$
 $(11)_5$
 $\frac{(a_9 a_8 \dots a_2 a_1 a_0)_5}{(a_9 a_8 \dots a_2 a_1 a_0)_5}$
 $\frac{(a_9 a_8 \dots a_2 a_1 a_0)_5}{(x 0 0 0 \dots 0 0 1)_5}$

$$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 0, a_3 = 4, a_4 = 0, \dots a_9 = 4.$$

5. $0 \leq x, y < 31$ olmak üzere,

$$(x^2 - 18)^2 \equiv y^2 \pmod{31}$$

denkliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı sıralı ikilisi vardır? (UMO-2000)

Çözüm: $(x^2 - 18 - y)(x^2 - 18 + y) \equiv 0 \pmod{31}$

$\Rightarrow y \equiv x^2 - 18 \pmod{31}$ veya $y \equiv 18 - x^2 \pmod{31}$.

x 'in alacağı 31 değer için 62 tane (x, y) ikilisi oluşur, fakat

$x^2 - 18 \equiv 18 - x^2 \pmod{31} \Leftrightarrow x^2 \equiv 18 \pmod{31} \Leftrightarrow x \equiv \pm 7 \pmod{31}$

durumunda ikiye değil, birer ikili oluşur. $\Rightarrow 62 - 2 = 60$ ikili oluşur.

6. Kaç p asal sayısı için,

$$x^3 - x + 2 \equiv (x - r)^2(x - s) \pmod{p}$$

denkliğinin tüm x tam sayıları tarafından gerçekleşmesini sağlayan r, s tamsayıları bulunabilir? (UMO-1999)

Çözüm: $x^3 - x + 2 \equiv x^3 - (2r + s)x^2 + (r^2 + 2rs)x - r^2s \pmod{p}$

$\Rightarrow 2r + s \equiv 0 \pmod{p}; r^2 + 2rs \equiv -1 \pmod{p}; r^2s \equiv -2 \pmod{p}$

$\Rightarrow s \equiv -2r \pmod{p} \Rightarrow 3r^2 \equiv 1 \pmod{p}; 2r^3 \equiv 2 \pmod{p}$

$p = 2$ ise, $x^3 - x + 2 \equiv x(x - 1)(x + 1) \equiv (x - 1)^2(x - 0) \pmod{p}$

$p \neq 2$ ise, $r^3 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 3r^3 \equiv 3 \pmod{p} \Rightarrow (3r^2) \cdot r \equiv 3 \pmod{p}$

$\Rightarrow r \equiv 3 \pmod{p} \Rightarrow 3^3 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 26 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 13$.

$(x - 3)^2(x - 7) \equiv (x^2 - 6x + 9)(x - 7) \equiv x^3 - 13x^2 + 51x - 63$

$\equiv x^3 - x + 2 \pmod{13}$. Yanıt: $p = 2$ ve $p = 13$.

7. $|15x^2 - 32x - 28|$ sayısının asal olmasını sağlayan kaç x tam sayısı vardır? (UMO-2002)

Çözüm: $|15x^2 - 32x - 28| = |5x - 14| \cdot |3x + 2| \Rightarrow$

(a) $|5x - 14| = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow |15x^2 - 32x - 28| = 11$ asaldır.

(b) $|3x + 2| = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow |15x^2 - 32x - 28| = 19$ asaldır.

8. n 'nin bir tek sayı böleni varsa, $2^n + 1$ 'in asal olmadığını gösteriniz. (PSS131.11)

Çözüm: $n = t \cdot m$ (t tek sayı)

$\Rightarrow 2^n + 1 = (2^m)^t + 1 = (2^m + 1)(2^{m(t-1)} - 2^{m(t-2)} + \dots + 1)$.

9. Bir n doğal sayısı 48'e de, 49'a da bölündüğünde de kalan 47 oluyor. Bu n sayısı 42'ye bölününce kalan ne olur? (UMO-1995)

Çözüm:

$$\begin{aligned}n &\equiv 47 \pmod{48} \Rightarrow n \equiv 5 \pmod{6} \\n &\equiv 47 \pmod{49} \Rightarrow n \equiv 5 \pmod{7} \\&\Rightarrow n \equiv 5 \pmod{42}\end{aligned}$$

10. $p, p + 4, p + 14$ sayıları asaldır. p 'yi bulunuz. (PSS132.39b)

Çözüm: $p = 3$ ise, $p + 4 = 7, p + 14 = 17$.

$$p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p + 14 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p + 14 \text{ asal değildir.}$$

$$p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow p + 4 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p + 4 \text{ asal değildir.}$$

11. $18 \cdot x \equiv 39 \pmod{45}$ denkleğinin tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $(18, 45) = 9 \nmid 39 \Rightarrow$ çözüm yoktur.

12. $4 \cdot x \equiv 3 \pmod{7}; 2 \cdot x \equiv 1 \pmod{3}; x \equiv 11 \pmod{4}$ denkleklerini sağlayan dört basamaklı en küçük sayıyı bulunuz.

Çözüm: $x \equiv 6 \pmod{7}, x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 6, 13, \boxed{20} \pmod{21}$

$$x \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow x \equiv 20, 41, 62, \boxed{83} \pmod{84}$$

$$\Rightarrow x = 83 + 84 \cdot n \geq 1000 \Rightarrow 84 \cdot n \geq 917 \Rightarrow n \geq 10 \frac{77}{84} \Rightarrow n = 11$$

$$\Rightarrow x = 83 + 84 \cdot 11 = 1007$$

13. $10 \cdot x + 14 \equiv 0 \pmod{18}$ denkleğinin tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $(10, 18) = 2 \mid 14 \Rightarrow 5 \cdot x \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{9}$

$$\Rightarrow x \equiv 4, 13 \pmod{18}$$

14. $x \equiv 2 \pmod{6}; x \equiv 3 \pmod{5}; x \equiv 0 \pmod{7}$ denklek sisteminin mod 1050'te kaç tane kökü vardır?

Çözüm: mod 210' da tek çözüm \Rightarrow mod 1050' de 5 çözüm.

15. a, b, c tam sayılar olmak üzere,

$$x \equiv a \pmod{14}; x \equiv b \pmod{15}; x \equiv c \pmod{16}$$

denklek sistemini ve $0 \leq x < 2000$ koşulunu sağlayan x tamsayılarının sayısı kaç olabilir? (UMO-1999)

Çözüm: a tek, c çift olursa, çözüm olmaz (0). $[14, 15, 16] = 1680 \Rightarrow x_1, x_2$ kökse $x_2 - x_1 = 1680n \Rightarrow 0, 1$ veya 2 kök.

16. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{30}$ denkleğinin $0 < x < 30$ olacak şekilde kaç farklı tam sayı çözümlü vardır? (UMO-1998)

Çözüm:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3}$$

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow x = 13.$$

17. $x^3 + 3x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{25}$ denkleğinin, 25 moduna göre farklı kaç çözümlü vardır? (UMO-2001)

Çözüm: $(x + 3)(x^2 + 1) \equiv 0 \pmod{25}$.

$$(a) \quad x + 3 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv \boxed{2}, \boxed{7}, \boxed{12}, \boxed{17}, \boxed{22} \pmod{25};$$

$$(b) \quad x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow x^2 - 49 \equiv 0 \pmod{25} \\ \Rightarrow (x - 7)(x + 7) \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow x \equiv \boxed{18} \pmod{25}$$

18. $x^3 - 5x^2 - 22x + 56 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleğinin kaç p asal sayısı için $0 \leq x < p$ olmak üzere üç farklı tam sayı kökü yoktur? (UMO-1998)

Çözüm: $(x - 2)(x - 7)(x + 4) \equiv 0 \pmod{p}$; 2, 7, -4 köklerinden en az ikisi denktir.

$$2 \equiv 7 \pmod{p} \Rightarrow p = 5;$$

$$7 \equiv -4 \pmod{p} \Rightarrow p = 11;$$

$$2 \equiv -4 \pmod{p} \Rightarrow p = 2 \text{ veya } p = 3.$$

19. Her n tam sayısı için $n^3 + 5n$ sayısının 6'ya bölündüğünü kanıtlayınız. (PSS131.3a)

Çözüm: $n^3 + 5n \equiv n^3 - n \equiv (n - 1)n(n + 1) \equiv 0 \pmod{6}$.

20. Hangi n tam sayıları için $n^5 - n$ sayısı 120'ye bölünüyor? (PSS131.3c)

Çözüm: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. $n^5 - 1 = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1) \Rightarrow 3 \mid (n^5 - 1)$.

$$n \equiv 1, 0, -1 \pmod{5} \Rightarrow 5 \mid (n^5 - 1);$$

$$n \equiv \pm 2 \pmod{5} \Rightarrow n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 5 \mid (n^2 - 1).$$

n tekse $2^3 \mid (n - 1)(n + 1)$. n çiftse, $n - 1$, $n + 1$, $n^2 + 1$ tektir.

\Rightarrow Yanıt: n 'nin tüm tek sayı değerleri ve 8'e bölünen çift sayı değerleri.

21. $n = ab$ ise, $2^n - 1$ 'in $2^a - 1$ 'e bölündüğünü gösteriniz. (PSS132.37b)

Çözüm: $2^n - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^a + 1)$

22. $p, p + 10, p + 14$ sayıları asaldır. p 'yi bulunuz. (PSS132.39a)

Çözüm: $p = 3 \Rightarrow p + 10 = 13, p + 14 = 17$ asal sayılardır.

$p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p + 14 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p + 14$ asal olamaz.

$p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow p + 10 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p + 10$ asal olamaz.

23. $p, 2p + 1, 4p + 1$ sayıları asaldır. p 'yi bulunuz. (PSS132.40a)

Çözüm: $p = 3 \Rightarrow 2p + 1 = 7, 4p + 1 = 13$ asal sayılardır.

$p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2p + 1 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 2p + 1$ asal olamaz.

$p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 4p + 1 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 4p + 1$ asal olamaz.

24. $p, 8p^2 + 1$ sayıları asaldır. p 'yi bulunuz. (PSS132.40b)

Çözüm: $p = 3 \Rightarrow 8p^2 + 1 = 73$ asal sayıdır.

$p \equiv \pm 1 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 8p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$

$\Rightarrow 8p^2 + 1$ asal sayı olamaz.