1. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz. **(PSS272.E2)**

Çözüm: $x = y = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0+0) = f(0) + f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

$y = -x \Rightarrow 0 = f(0) = f(x+(-x)) = f(x)+f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.

$y = x \ \Rightarrow \ f(2x) = 2f(x)$.
$y = 2x \quad \Rightarrow \quad f(3x) = f(2x+x) = f(2x)+f(x) = 2f(x)+f(x) = 3f(x)$.
Tümevarımla tüm n pozitif tam sayıları için $f(nx) = nf(x)$ olduğunu gösterelim.
$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) + f(x)nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$.
$-n$ negatif tam sayıları için de
$f((-n)x) = f(-nx) = -f(nx) = -nf(x) = (-n)f(x)$.

Her $x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ sayısı için $m = nx \Rightarrow f(nx) = f(m \cdot 1) \Rightarrow$
$nf(x) = mf(1) \Rightarrow f(x) = \dfrac{m}{n}f(1) = xf(1)$.
Şimdi $f(1) = c$ ile gösterirsek tüm x rasyonel sayıları için $f(x) = cx$ elde edilir. Her gerçel x sayısı $a_n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şeklinde gösterilebildiğinden $f(x) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = cx$.

2. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için
$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$
eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz. **(PSS274.E3)**

Çözüm: Bir a için $f(a) = 0$ ise, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = f(x - a + a) = f(x-a)f(a) = 0$. Her x için $f(x) \neq 0$ olsun. $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 > 0 \Rightarrow$ $g(x) = \ln f(x)$ şeklinde tanımlanan $g(x)$ fonksiyonu için

$g(x+y) = g(x) + g(y) \quad \Rightarrow \quad g(x) = cx \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^{cx} = a^x$

3. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$
eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz. **(PSS276.E6)**

Çözüm: $f(0) = a$ olsun. $y = 0 \;\Rightarrow\; f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{f(x)+a}{2} \;\Rightarrow$

$\dfrac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x+y)+a}{2} \Rightarrow f(x+y) = f(x)+f(y)-a$

$g(x) = f(x)-a \Rightarrow g(x+y) = g(x)+g(y) \Rightarrow g(x) = cx \Rightarrow f(x) = cx+a$

4. $\begin{cases} f_1(x) = x^2 + x \\ g_1(x) = x - 2 \end{cases}$ $\begin{cases} f_2(x) = 2x^2 - x, \\ g_2(x) = 2x, \end{cases}$ $\begin{cases} f_3(x) = x^2 + x \\ g_3(x) = x + 2 \end{cases}$

olmak üzere, fonksiyonlar üzerinde tanımlı toplama, çarpma ve çıkarma işlemleri kullanılarak, $i \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere f_i ve g_i fonksiyonlarından $h(x) = x$ fonksiyonu elde edilebiliyorsa, $F_i = 1$; aksi halde $F_i = 0$ olarak tanımlanıyor. (F_1, F_2, F_3) nedir? **(131.21)**

a) (0, 0, 0) b) (0, 0, 1) c) (0, 1, 0) d) (0, 1, 1) e) Hiçbiri

Çözüm: $3 \mid f_1(5) = 30;\;\; 3 \mid g_1(5),\;\; 3 \nmid h(5) = 5 \;\Rightarrow\; F_1 = 0.$
$f_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \in \mathbb{Z},\;\; g_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 \in \mathbb{Z};\;\; h\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow\; F_2 = 0.$
$h(x) = x = g_3^2(x) - g_3(x) - g_3(x) - f_3(x) \Rightarrow F_3 = 1 \Rightarrow (0, 0, 1).$

5. Her $x \neq 0, 1$ için

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonunu bulunuz. **(PSS278.15)**

Çözüm: x yerine $\dfrac{1}{1-x} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) + f\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{1-x}$

x yerine $1 - \dfrac{1}{x} \Rightarrow f\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) + f(x) = 1 - \dfrac{1}{x};\;\; f(x) + f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = x.$

İlk eşitliği -1 ile çarpıp üç eşitliği topladığımızda:

$2f(x) = x - \dfrac{1}{1-x} + 1 - \dfrac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1-x}\right)$

6. Tüm pozitif tamsayılardan oluşan küme $\mathbb{N}$ ile gösterilmek üzere, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu

   (a) m ve n aralarında asal olunca, $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$

   (b) p ve q asal olunca, $f(p + q) = f(p) + f(q)$

   özelliklerine sahipse, $f(100)$ kaçtır? **(A5.15.6)**

Çözüm: $f(3+3) = f(3 \cdot 2) = f(3) \cdot f(2)$;
$f(3+3) = f(3)+f(3) = 2f(3) \Rightarrow f(2) = 2 \Rightarrow f(4) = f(2)+f(2) = 4$.
$f(5) = f(3)+f(2) = 2+f(3)$; $f(7) = f(4)+f(3) = 4+f(3)$
$f(12) = f(5+7) = f(5)+f(7) = 6+2f(3)$;
$f(12) = f(4) \cdot f(3) = 4f(3) \Rightarrow f(3) = 3 \Rightarrow f(5) = 5$; $f(7) = 7$.
$f(28) = f(5+23) = 5+f(23)$; $f(28) = f(4 \cdot 7) = 4 \cdot 7 = 28 \Rightarrow$
$f(23) = 23 \Rightarrow f(25) = f(2)+f(23) = 25 \Rightarrow$
$f(100) = f(4) \cdot f(25) = 100$.

7. $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{cases} f(x+1, y+1) + f(x, y) = f(x, y+1) + f(x+1, y) \\ f(x, 0) = x^2 \\ f(0, y) = -y^2 \end{cases}$$

koşullarını sağlıyor. $f(1000, 996)$ nedir? **(70.33)**

Çözüm: $f(x, y) = x^2 - y^2$ olduğunu gösterelim. $n = x + y \geqslant 0$ sayısına göre tümevarım uygulayalım. $f(x+1, y+1) = -f(x, y) + f(x, y+1) + f(x+1, y) = -x^2+y^2+x^2-(y+1)^2+(x+1)^2-y^2 = (x+1)^2-(y+1)^2 \Rightarrow$ Doğru $\Rightarrow f(1000, 1996) = 1000^2 - 996^2 = 4 \cdot 1996 = 7984$.

8. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz. **(PSS278.20)**

Çözüm: $g(x) = f(x) - \dfrac{x^3}{3} \Rightarrow g(x+y) = f(x+y) - \dfrac{(x+y)^3}{3} = g(x) + \dfrac{x^3}{3} + g(y) + \dfrac{y^3}{3} + x^2y + xy^2 - \dfrac{x^3}{3} - x^2y - xy^2 - \dfrac{y^3}{3} = g(x) + g(y) \Rightarrow$
$g(x) = cx \Rightarrow f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + cx$

9. $x \in \mathbb{R}$ için $f_1(x) = x^2 - 2x$ ve $n \geq 1$ için

$$f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$$

bağlantılarıyla $f_1, f_2, f_3, \ldots$ fonksiyonları tanımlıyor. f_{1996} fonksiyonu $[0, 2]$ kapalı aralığında alabileceği en küçük ve en büyük değerler nedir? **(69.30)**

Çözüm: $f_1([0,2]) = [-1,0]$;
$f_2([0,2]) = f_1([-1,0]) = [0,3]$;
$f_3([0,2]) = f_1([0,3]) = [-1,3]$;
$f_4([0,2]) = f_1([-1,3]) = [-1,3]$;
...
$f_{1996}([0,2]) = [-1,3] \Rightarrow -1$ ve 3.

10.
$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)$$
fonksiyonel denklemini sağlayan tüm sürekli f fonksiyonlarını bulunuz. **(PSS278.12)**

Çözüm: $y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. $y = x \Rightarrow f(2x) = 2f(x)$.
$f(2x+x) - f(2x-x) = 2f(x) \Rightarrow f(3x) = 3f(x)$.
Tümevarımla $f(nx) = nf(x)$ kanıtlanır $\Rightarrow f(n) = nf(1)$.
$x = \dfrac{p}{q} \Rightarrow p = qx \Rightarrow f(p) = qf(x) \Rightarrow f(x) = \dfrac{pf(1)}{q} = x \cdot f(1)$
$\Rightarrow f(x) = xf(1) = cx$.

11.
$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$$
fonksiyonel denklemini sağlayan tüm sürekli f fonksiyonlarını bulunuz. **(PSS278.13)**

Çözüm: $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} \Rightarrow g(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{f(x)\cdot f(y)} = \dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{f(y)} =$ $g(x) + g(y) \Rightarrow g(x) = cx \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{cx}$.

12. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için
$$xf(x) + 2xf(-x) = -1$$
eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz. **(PSS279.31)**

Çözüm: $x \to -x \Rightarrow -xf(-x) - 2xf(x) = -1$; 2 ile çarpıldığında $\Rightarrow -2xf(-x) - 4xf(x) = -2$, bu da ilk denklemle toplandğında
$-3f(x) = -3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x}$ bulunur.

13. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları tüm gerçel sayılar için tanımlı ve gerçel değerli fonksiyonlar olmak üzere, her x ve y için

$$f(x+g(y)) = 3x+y+7$$

eşitliği sağlanmaktadır. $g(2+f(7))$ değerini bulunuz. **(A55.9)**

Çözüm: $y=0,\ f(0)=c \Rightarrow f(x+c)=3x+7 \Rightarrow f(x)=3(x-c)+7=3x+(7-3c)$ $3x+y+7=f(x+g(y))=3(x+g(y))+(7-3c) \Rightarrow g(y)=\dfrac{y}{3}+c \Rightarrow g(2+f(7))=\dfrac{1}{3}(2+f(7))+c=\dfrac{1}{3}(2+3\cdot 7+(7-3c))+c=10.$

14. $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$ olmak üzere $f:\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ fonksiyonu her $(x,y)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} f(0,y)=y+1, \\ f(x+1,0)=f(x,1), \\ f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y)) \end{cases}$$

eşitliklerini sağlamaktadır. $f(1,1998)$'i bulunuz. **(A39.18)**

Çözüm: $f(1,0)=f(0,1)=2$; $f(1,1)=f(0,f(1,0))=f(0,2)=3$ $f(1,2)=f(0,f(1,1))=f(0,3)=4$. Tümevarımla $f(1,x)=x+2 \Rightarrow f(1,1998)=2000$.

15. Her a,b gerçel sayıları için

$$\begin{cases} f(a+b)=f(a\cdot b), \\ f(1999)=1999 \end{cases}$$

koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu için $f(2000)$ nedir? **(A5.10.2)**

Çözüm: $b=0 \Rightarrow$ her a için $f(a)=f(a+0)=f(a\cdot 0)=f(0) \Rightarrow f(2000)=f(0)=f(1999)=1999$

16. $[\![x]\!]$, x'in tam değer fonksiyonu olmak üzere, $\{x\}=x-[\![x]\!]$ olarak tanımlansın. Her x gerçel sayısı için,

$$x=f(x)+f(\{x\})$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonun $x=-17/7$ noktasındaki değeri nedir? **(A6.2.3)**

Çözüm: $x=-\dfrac{17}{7} \Rightarrow -\dfrac{17}{7}=f\left(-\dfrac{17}{7}\right)+f\left(\dfrac{4}{7}\right)$. $x=\dfrac{4}{7} \Rightarrow$ $\dfrac{4}{7}=f\left(\dfrac{4}{7}\right)+f\left(\dfrac{4}{7}\right) \Rightarrow f\left(\dfrac{4}{7}\right)=\dfrac{2}{7} \Rightarrow f\left(-\dfrac{17}{7}\right)=-\dfrac{17}{7}-\dfrac{2}{7}=-\dfrac{19}{7}.$

17. Negatif olmayan x, y tamsayıları için tanımlanan $F(x, y)$ fonksiyonunda

    (a) her x, y için $F(x+1, y) + F(x, y+1) = F(x, y) + F(x+1, y+1)$,

    (b) her x için $F(x, 0) = x$,

    (c) her $y > 0$ için $F(0, y) = 1$

    ise, $F(1000, 993)$ nedir? **(18.36)**

    Çözüm: $y = 0 \Rightarrow F(x+1, 0) + F(x, 1) = F(x, 0) + F(x+1, 1)$
    $y = 1 \Rightarrow F(x+1, 1) + F(x, 2) = F(x, 1) + F(x+1, 2)$
    $\ldots$
    $y = 992 \Rightarrow F(x+1, 993) + F(x, 993) = F(x, 992) + F(x+1, 993)$
    Bunlar taraf tarafa toplanırsa
    $F(x+1, 0) + F(x, 993) = F(x, 0) + F(x+1, 993) \Rightarrow$
    $F(x+1, 993) = F(x, 993) + 1 \Rightarrow F(1000, 993) = F(999, 993) + 1 = F(998, 993) + 2 = \ldots = F(0, 993) + 1000 = 1 + 1000 = 1001.$

18. Rasyonel sayılardan rasyonel sayılara tanımlı bir f fonksiyonu tüm a, b rasyonel sayıları için

    $$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

    denklemini sağlasın ve $f(2) = 3$ olsun. $f\left(\frac{5}{2}\right)$ değeri nedir? **(23.11)**

    Çözüm: $f(x) = cx$. $3 = f(2) = c \cdot 2 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$.

19. Pozitif tam sayı çiftlerinin kümesinden pozitif tam sayılar kümesine giden bir f fonksiyonu, x, y pozitif tam sayıları için

    $$f(x, x) = x, \; f(x, y) = f(y, x) \text{ ve } f(x, y) = f(x, x+y)$$

    koşullarını sağlıyorsa, $f(91, 143)$ nedir? **(24.12)**

    Çözüm: $f(91, 143) = f(91, 52) = f(39, 52) = f(39, 13) = f(26, 13) = f(13, 13) = 13 \Rightarrow f(91, 143) = 13$.
    Aslında $f(x, y) = \text{ebob}(x, y)$ olduğu açıktır.

20. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

    $$f(x) + f(y) = f(x) \cdot f(y) + 1 - \frac{1}{xy}$$

koşulunu sağlıyor ve $f(2) < 1$ ise, $f(3)$ değeri nedir? **(103.28)**

Çözüm: $y = x \Rightarrow [f(x)]^2 - 2f(x) + 1 = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow [f(x) - 1]^2 = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow$ $f(x) - 1 = \dfrac{1}{x}$ veya $f(x) - 1 = -\dfrac{1}{x} \Rightarrow f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ veya $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \Rightarrow f(2) = \dfrac{3}{2}$ veya $f(2) = \dfrac{1}{2}$. $f(2) < 1 \Rightarrow f(2) = \dfrac{1}{2}$.
$x = 3,\ y = 2 \Rightarrow f(3) + f(2) = f(3) \cdot f(2) + 1 - \dfrac{1}{3 \cdot 2} \Rightarrow$
$f(3) + \dfrac{1}{2} = f(3) \cdot \dfrac{1}{2} + 1 - \dfrac{1}{6} \Rightarrow f(3) = \dfrac{2}{3}$.

21. Tüm x, y pozitif gerçel sayıları için

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının alabileceği farklı $f(2)$ değerlerinin toplamı nedir? **(136.32)**

Çözüm: $x = y = 1 \Rightarrow [f(1)]^2 - f(1) = 2 \Rightarrow$
$(f(1) + 1)(f(1) - 2) = 0 \Rightarrow$ 1) $f(1) = -1$ veya 2) $f(1) = 2$.
1) $y = 1 \Rightarrow -f(x) - f(x) = \dfrac{1}{x} + x = \dfrac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow f(x) = -\dfrac{x^2 + 1}{2x} \Rightarrow$ $f(2) = -\dfrac{5}{4}$.
2) $y = 1 \Rightarrow 2f(x) - f(x) = \dfrac{1}{x} + x \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x} + x \Rightarrow f(2) = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$.
Böylece $-\dfrac{5}{4} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{4}$

22. f fonksiyonu her gerçel x için

$$f(x) + 3f(1 - x) = x^2$$

eşitliğini sağlıyorsa, $S = \{x : f(x) = 0\}$ olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi doğrudur? **(2003.32)**

a) S sonsuz bir kümedir b) $\{0, 1\} \subset S$ c) $S = \varnothing$
d) $S = \{\dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}, \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}\}$ e) Hiçbiri

Çözüm: x yerine $1 - x$ yazılırsa $f(1 - x) + 3f(x) = (x - 1)^2$ bulunur. Bu denklemi -3 ile çarpıp sorudaki denklem ile toplayalım:

$-8f(x) = x^2 - 3x^2 + 6x - 3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{8} = 0 \Rightarrow$
$2x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \left\{\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right\}.$

23.

$$x^3 \cdot 3^{\frac{1}{x^3}} + \frac{1}{x^3} \cdot 3^{x^3} = 6$$

denkleminin kaç farklı gerçel çözümü vardır? **(101.25)**

a) 3 b) 2 c) 0 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

Çözüm: $x > 0 \Rightarrow 6 = x^3 \cdot 3^{\frac{1}{x^3}} + \dfrac{1}{x^3} \cdot 3^{x^3} \geqslant 2\sqrt{x^3 \cdot 3^{\frac{1}{x^3}} \cdot \dfrac{1}{x^3} \cdot 3^{x^3}} =$
$2\sqrt{3^{\frac{1}{x^3}+x^3}} \geqslant 2\sqrt{3^{2\sqrt{\frac{1}{x^3} \cdot x^3}}} = 6 \Rightarrow$ Hepsi eşitlik olmak zorunda $\Rightarrow$
$x^3 = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ Tek çözüm bulunur.