1. x_n dizisi, $x_0 = 2$, $x_1 = 7$ ve her $n \geq 2$ için

$$x_{n+1} = 7x_n - 12x_{n-1}$$

olarak tanımlanıyor. x_n'nin n cinsinden formülünü yazınız. **(PSS222.E1)**

Çözüm: $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \ \lambda_2 = 4 \Rightarrow x_n = a \cdot 3^n + b \cdot 4^n$
$n = 0 \Rightarrow a + b = 2;\ \ n = 1 \Rightarrow 3a + 4b = 7 \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow x_n = 3^n + 4^n$.

2.
$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2001^2} + \frac{1}{2002^2}$$

ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur? **(169.33)**

A) $1 \leq S \leq 4/3$ B) $4/3 \leq S < 2$ C) $2 \leq S < 7/3$ D) $7/3 \leq S < 5/2$ E) $5/2 \leq S < 3$

Çözüm: $S < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2001 \cdot 2002} = 1 + (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$
$+ \ldots + (\frac{1}{2001} - \frac{1}{2002}) = 2 - \frac{1}{2002} < 2$
$S > 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2002 \cdot 2003} = 1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots +$
$(\frac{1}{2002} - \frac{1}{2003}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2003} > \frac{4}{3}$

3. n pozitif tam sayı olmak üzere $\{a \in \mathbb{N} : |\sqrt{a} - n| < \frac{1}{2}\}$ kümesinde kaç eleman vardır? **(49.23)**

Çözüm: $|\sqrt{a} - n| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \sqrt{a} - n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow n - \frac{1}{2} < \sqrt{a} < n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$n^2 - n + \frac{1}{4} < a < n^2 + n + \frac{1}{4} \Leftrightarrow a \in \{n^2 - n + 1, \ldots, n^2 + n\} \Rightarrow 2n$ tane.

4. $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ negatif olmayan gerçel sayılar ve $x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} = 100$ ise,

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + \ldots + x_{98} \cdot x_{99} + x_{99} \cdot x_{100}$$

toplamının alabileceği en büyük değer nedir? **(88.31)**

Çözüm: S= $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + \ldots + x_{98} \cdot x_{99} + x_{99} \cdot x_{100} \leq$
$(x_1 + x_3 + \ldots + x_{99}) \cdot (x_2 + x_4 + \ldots + x_{100})$ =A.

$$\sqrt{A} \ \le \ \frac{(x_1 + x_3 + \ldots + x_{99}) + (x_2 + x_4 + \ldots + x_{100})}{2} \ = \ \frac{100}{2} \ = \ 50 \ \Rightarrow$$

A$\le$ 2500. $x_1 = x_2 = 50$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_{100} = 0 \Rightarrow$ S$=$ 2500.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{9} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$ toplamı nedir? **(60.11)**

Çözüm:

$$\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{an^2 + 3an + 2a + bn^2 + 2bn + cn^2 + cn}{n(n+1)(n+2)}$$

$a + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -1$
$3a + 2b + c = 3 \Rightarrow 2b + c = 0$
$\Rightarrow b = 1 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1.$

$$\sum_{n=1}^{9} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \ldots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{2}{11} = \frac{189}{220}$$

6. a_n dizisi $a_1 = 0, |a_2| = |a_1 + 1|, \ldots, |a_n| = |a_{n-1} + 1|$ koşulu ile tanımlanmıştır. $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge -\dfrac{1}{2}$ olduğunu kanıtlayınız. **(PSS228.48)**

Çözüm:

$$\begin{cases} a_1^2 = 0, \\ a_2^2 = a_1^2 + 2a_1 + 1, \\ a_3^2 = a_2^2 + 2a_2 + 1, \\ \ldots, \\ \ldots, \\ \ldots, \\ a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n + 1, \quad . \end{cases}$$

Eşitlikler toplandığında $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + n = a_{n+1}^2 \ge 0$, buradan da $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ge -\dfrac{n}{2}$ elde edilir.

7. $T_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$ ve

$$P_n = \frac{4T_2}{2(T_2 - T_1)} \cdot \frac{4T_3}{3(T_3 - T_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{4T_n}{n(T_n - T_{n-1})}$$

olmak üzere P_{25} nedir? **(7.17)**

Çözüm: $T_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad T_n - T_{n-1} = n^3 \Rightarrow$

$$P_{25} = \frac{4 \cdot \dfrac{2^2 \cdot 3^2}{4}}{2 \cdot 2^3} \cdot \frac{4 \cdot \dfrac{3^2 \cdot 4^2}{4}}{3 \cdot 3^3} \cdot \frac{4 \cdot \dfrac{4^2 \cdot 5^2}{4}}{4 \cdot 4^3} \cdot \ldots \cdot \frac{4 \cdot \dfrac{25^2 \cdot 26^2}{4}}{25 \cdot 25^3} = \frac{26^2}{2^2} = 169.$$

8. Verilen bir (a_n) dizisinden her n için $b_n = a_{n+1} - a_n$ şeklinde bir (b_n) dizisi tanımlanıyor. $a_8 = a_{40} = 0$ ve her n için $b_{n+1} - b_n = 2$ ise, a_1 nedir? **(17.35)**

   Çözüm:

$$\begin{array}{lll} b_1 = a_2 - a_1 & b_1 = a_2 - a_1 & 32b_1 = -1440 \\ b_1 + 2 = a_3 - a_2 & b_1 + 2 = a_3 - a_2 & b_1 = -45 \\ \ldots & \ldots & a_1 = -7 \cdot (-45) - 42 = 273 \\ \ldots & \ldots & \\ & & \\ \ldots & \ldots & \\ & & \\ \underline{b_1 + 12 = a_8 - a_7} & \underline{b_1 + 76 = a_{40} - a_{39}} & \\ 7b_1 + 42 = -a_1 & 39b_1 + 1482 = -a_1 & \end{array}$$

9. $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots + \dfrac{99}{100!}$ toplamı neye eşittir? **(42.8)**

   A) $1 + \dfrac{99}{100!}$ B) $\dfrac{101}{100}$ C) $1 - \dfrac{99}{100!}$ D) 1 E) $1 - \dfrac{1}{100!}$

   Çözüm: $S = \dfrac{2-1}{2!} + \dfrac{3-1}{3!} + \dfrac{4-1}{4!} + \ldots + \dfrac{100-1}{100!} = (\dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{2!}) + (\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!}) + (\dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!}) + \ldots + (\dfrac{1}{99!} - \dfrac{1}{100!}) = 1 - \dfrac{1}{100!}$

10. a_n ile $\sqrt{n}$'ye en yakın olan tam sayı ise, $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_{2070}}$ toplamı nedir? **(64.21)**

    Çözüm: $a_n = k \Leftrightarrow |\sqrt{n} - k| < \dfrac{1}{2}$. 3. sorudan dolayı tam $2k$ tane n için $a_n = k$'dır. $2+4+\ldots+2m = 2070 \Rightarrow 2 \cdot \dfrac{m(m+1)}{2} = 2070 \Rightarrow m = 45 \Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_{2070}} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1} + \underbrace{\dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2}}_{4} + \ldots + \underbrace{\dfrac{1}{45} + \ldots + \dfrac{1}{45}}_{90} = 45 \cdot 2 = 90.$

11. $T = \dfrac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{1996\sqrt{1997}+1997\sqrt{1996}}$
toplamı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur? **(77.10)**

A) $\dfrac{43}{44} < T < \dfrac{44}{45}$ B) $\dfrac{43}{176} < T < \dfrac{43}{88}$ C) $T = \dfrac{1995}{1996 \cdot 1997}$

D) $T = \dfrac{1996}{1997 \cdot 1998}$ E) Hiçbiri

Çözüm: $\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} =$
$\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow T = \dfrac{1}{\sqrt{1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{3} + \ldots +$
$\dfrac{1}{\sqrt{1996}} - \dfrac{1}{\sqrt{1997}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1997}}$
$44 < \sqrt{1997} < 45 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{44} < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1997}} < 1 - \dfrac{1}{45} \Rightarrow \dfrac{43}{44} < \text{A} < \dfrac{44}{45}$.

12. (a_n) gerçel sayılar dizisi, her $n \geq 1$ için, $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$ koşulunu sağlıyorsa, $\{a_n : n \geq 1\}$ kümesinin eleman sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz? **(121.32)**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Hiçbiri

Çözüm:
$-1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1, \ldots \ \Rightarrow \text{s(A)} = 2$

$1,\ 2,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \ldots \Rightarrow \text{s(A)} = 3$

$2,\ 4,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \ldots \Rightarrow \text{s(A)} = 4$

$-1,\ 2,\ -2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \ldots \Rightarrow \text{s(A)} = 5$

13. (a_n) dizisi, $a_1 = 1$ ve her $n \geq 2$ tam sayısı için $|a_n| = |a_{n-1}+2|$ koşullarını sağlıyorsa, $\sum_{i=1}^{2000} a_i$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir? **(127.12)**

Çözüm: $a_1^2 = 1$; $a_2^2 = a_1^2 + 4a_1 + 4$; $a_3^2 = a_2^2 + 4a_2 + 4$; $\ldots$; $a_{2001}^2 =$ $a_{2000}^2 + 4a_{2000} + 4$ eşitlikleri toplandığında $0 \leq a_{2001}^2 = 4 \cdot \sum_{i=1}^{2000} a_i + 8001$,

buradan da $\sum_{i=1}^{2000} a_i \geq -\frac{8001}{4} > -2001$, yani $\sum_{i=1}^{2000} a_i \geq -2000$ elde edilir.
Öte yandan dizi $1, \ -3, \ -1, \ -1, \dots, -1$ olarak alınırsa,
$\sum_{i=1}^{2000} a_i = -2000$ olacak.

14. 21 gerçel sayıdan herhangi 10 tanesinin toplamı, geri kalan 11 tanesinin toplamından daha küçük ise, bu 21 sayıdan en az kaç tanesi pozitiftir? **(144.12)**

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) Hiçbiri

Çözüm: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{21}$ olsun. $\Rightarrow a_2 + a_3 + \dots + a_{11} \leq a_{12} + \dots + a_{21}$. $a_1 + a_2 + \dots + a_{11} > a_{12} + \dots + a_{21} \Rightarrow a_1 > 0 \Rightarrow a_i > 0$.

15. $[\![\sqrt[3]{7n+2}]\!] = [\![\sqrt[3]{7n+3}]\!]$ eşitliğini sağlamayan kaç n pozitif tam sayısı vardır? **(169.34)**

Çözüm: $k = [\![\sqrt[3]{7n+2}]\!] < [\![\sqrt[3]{7n+3}]\!] \Rightarrow 7n+2 \leq k^3 < 7n+3 \Rightarrow$
$k^3 \equiv 7n+2 \equiv 2 (\text{mod } 7)$. Olamaz.

16. $a_1, a_2, \dots, a_{2003}$ tam sayıları, $x_1 = 1$ ve $|a_{i+1}| = |a_i + 1|$ $(1 \leq i \leq 2002)$ koşullarını sağlıyorsa, $|a_1 + a_2 + \dots + a_{2003}|$ en az kaç olabilir? **(2003.36)**

A) 4 B) 34 C) 56 D) 65 E) Hiçbiri

Çözüm:

$$\begin{array}{l}
a_1^2 = 1 \\
a_2^2 = a_1^2 + 2a_1 + 1 \\
a_3^2 = a_2^2 + 2a_2 + 1 \\
\dots \\
\dots \\
\dots \\
\underline{+a_{2004}^2 = a_{2003}^2 + 2a_{2003} + 1} \\
a_{2004}^2 = 2 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{2003}) + 2004 \Rightarrow \\
|a_1 + a_2 + \dots + a_{2003}| = |\frac{a_{2004}^2 - 2004}{2}| \Rightarrow a_{2004} \quad \text{çift} \\
\Rightarrow a_{2004} = 44 \Rightarrow |a_1 + a_2 + \dots + a_{2003}| = 34.
\end{array}$$