BÖLÜNME

1. 72 tane pozitif tam böleni olan en küçük pozitif tamsayının on tabanına göre yazılımında rakamların kareleri toplamı nedir?

   Çözüm: $72 = 2^3 \cdot 3^2$ olduğundan sayı $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$; $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ vs olabilir. Bunlardan en küçüğü $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 10080$ için: $1^2 + 0^2 + 0^2 + 8^2 + 0^2 = 65$'tir.

2. Pozitif tam bölenlerinin sayısı tek sayı olan ilk on pozitif tamsayıyı bulunuz.

   Çözüm: $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ için $(k_1+1) \cdot \ldots \cdot (k_m+1)$ tekse, $k_1, \ldots, k_m$ sayıları çifttir. $\Rightarrow n$ tamkaredir. $\Rightarrow$ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

3. 3, 4 ve 5 ile bölünebilen ve pozitif bölenlerinin sayısı 20 olan tüm pozitif tamsayıları bulunuz.

   Çözüm: Sayı, $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 1$ olmak üzere $n = 3^a \cdot 2^b \cdot 5^c \cdot \ldots$ şeklindedir. $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \cdot \ldots = 20 \Rightarrow a = 1,\ b = 4,\ c = 1 \Rightarrow n = 240$.

4. $3n^3 - 5n^2 - 4n - 2$ sayısının $n - 2$' ye bölünmesini sağlayan tüm n tamsayılarını bulunuz.

   Çözüm: $3n^3 - 5n^2 - 4n - 2 = (3n^2 + n - 2)(n - 2) - 6 \Rightarrow (n-2) \mid 6$ $\Rightarrow n = -4, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8$.

5. $\dfrac{19n+11}{4n+5}$ kesrinin tamsayı olmasını sağlayan tüm n tamsayılarını bulunuz.

   Çözüm: $|4n+5| = (19n+11,\ 4n+5) = (3n-9,\ n+14) = (-51,\ n+14)$
   $\Rightarrow 4n+5 = \boxed{-51}, -17, \boxed{-3}, -1, \boxed{1}, 3, \boxed{17}, 51$
   $\Rightarrow n = -14, -2, 1, 3$.

6. n tamsayı olmak üzere, $(2n^2 + 3n + 5,\ n^2 + n + 1)$' in alabileceği tüm değerleri bulunuz.

   Çözüm: $(2n^2+3n+5,\ n^2+n+1) = (n+3,\ n^2+n+1) = (n+3, 7) = 1 \vee 7$.

7. $n \not\equiv 4 \pmod{11}$ ise, $(2n+3,\ n+7) = 1$ olduğunu ve $n \equiv 4 \pmod{11}$ ise, $(2n+3,\ n+7) = 11$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: $(2n+3,\, n+7) = (-11,\, n+7) = \begin{cases} 1, & 11 \nmid (n+7); \\ 11, & 11 \mid (n+7). \end{cases}$

$= \begin{cases} 1, & n \not\equiv 4 \pmod{11}; \\ 11, & n \equiv 4 \pmod{11}. \end{cases}$

8. Kareleri farkı 2002' ye eşit olan iki pozitif tamsayı bulunur mu?

   Çözüm: $x^2 - y^2 = 2002 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 2002$.
   $x-y$ ve $x+y$ ' nin ya ikisi de tektir, ya da ikisi de çifttir.
   $2002 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow$ Olamaz.

9. $n^2 - 3nm - 4m^2 = 24$ eşitliğini sağlayan tüm pozitif tam m, n sayılarını bulunuz.

   Çözüm: $(n-4m)(n+m) = 24$. Burada $(n+m)-(n-4m) = 5m$ olduğunda 24'ü, farkları 5'e bölünen iki pozitif tam sayının çarpımı şeklinde göstermemiz gerekir. $\Rightarrow$

   (a) $n - 4m = 3$, $n + m = 8 \Rightarrow n = 7$, $m = 1$

   (b) $n - 4m = 2$, $n + m = 12 \Rightarrow n = 10$, $m = 2$.

10. 1997 sayısının ikiden fazla ardışık pozitif tamsayının toplamı şeklinde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.

    Çözüm: $(n+1) + \ldots + (n+k) = \dfrac{k(2n+k+1)}{2} = 1997$
    $\Rightarrow k \cdot (2n+k+1) = 2 \cdot 1997$. Çarpanlardan biri çift diğeri tek ve $k < 2n+k+1$ olduğundan $k = 2$; $2n+k+1 = 1997$ olmak zorunda.
    $\Rightarrow$ Sadece 2 sayı olabilir.

11. $xy + 3x - 5y = -3$ denkleminin kaç tane tamsayı kökü bulunur?

    Çözüm: $x = \dfrac{5y-3}{y+3} = 5 - \dfrac{18}{y+3} \Rightarrow (y+3) \mid 18 = 2 \cdot 3^2$
    $\Rightarrow 2 \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 12$ tane kök bulunur.

12. Aşağıdaki sayılardan hangisi $b > 1$ doğal sayısı ne olursa olsun asal değildir?
    A)$(11)_b$ B) $(111)_b$ C) $(1111)_b$ D) $(11111)_b$ E) Hiçbiri

    Çözüm: $b = 4 \Rightarrow (11)_b = 5$; $b = 2 \Rightarrow (111)_b = 7$; $(1111)_b = 31$.
    $(1111)_b = b^3 + b^2 + b + 1 = (b+1)(b^2+1)$, her $b > 1$ için bileşiktir.

13. 6'dan büyük olan her tamsayının 1'den büyük ve aralarında asal olan iki tamsayının toplamı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

Çözüm: n tekse, $n = 2k+1 = k + (k+1)$
$n = 4k$ ise, $n = (2k-1) + (2k+1)$
$n = 4k+2$ ise $n = (2k-1) + (2k+3)$.
$(2k-1,\, 2k+3) = (2k-1,\, 4) = 1$.

14. 3'ten büyük her p asal sayısı için p^2-1' in 24' e bölündüğünü kanıtlayınız.

Çözüm: p tektir $\Rightarrow$ $p-1$ ve $p+1$ sayılarından biri 2' ye, diğeri 4' e bölünür. $\Rightarrow 8 \mid (p-1)(p+1)$.
$p \equiv \pm 1 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid (p^2-1)$.
$\Rightarrow 24 \mid (p^2-1)$.

15. Kendi basamaklarının faktöriyellerinin toplamına eşit olan tüm üç basamaklı sayıları bulunuz.

Çözüm: Sayı (xyz) olsun. $100x + 10y + z = x! + y! + z!$
$7! > 1000 \Rightarrow x,\, y,\, z \le 6 \Rightarrow (xyz) < 700$
$6! = 720 \Rightarrow x,\, y,\, z \le 5$
$3 \cdot 4! < 100 \Rightarrow x,\, y,\, z$' den en az biri 5' tir.
$(xyz) \le 3 \cdot 5! < 500 \Rightarrow x \neq 5 \Rightarrow (xyz) < 300 \Rightarrow x = 1 \vee 2$.
$x = 2$ ise, $y = z = 5$ olması gerekir; 255 sağlamıyor.
$x = 1$, $y = 5$ ise, $z! - z = 29$ denkleminin kökü yoktur.
$z = 5$ ise, $10y - y! = 16 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (xyz) = 145$.

16. $n \neq 1, 2$ pozitif tamsayı olmak üzere, $[n^2-3n+2,\, n-1]$' i bulunuz.

Çözüm: $(n-1) \mid (n^2-3n+2) \Rightarrow [n^2-3n+2,\, n-1] = n^2-3n+2$.

17. n pozitif tamsayı olmak üzere, $[32n+42,\, 38n+50]$' yi bulunuz.

Çözüm: $(32n+42,\, 38n+50) = (32n+42,\, 6n+8) = (2n+2,\, 6n+8) = (2n+2,\, 2) = (2,\, 2) = 2$. $\Rightarrow [32n+42,\, 38n+50] =$
$$\frac{(32n+42)(38n+50)}{2} = 2(16n+21)(19n+25).$$

18. n pozitif tamsayısının pozitif bölenlerinin sayısı 65 ise, $\sqrt[4]{n}$' nin tamsayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n = p^{64}$ veya $n = p^{12} \cdot q^4 \Rightarrow \sqrt[4]{n} = p^{16}$ veya $n = p^3 \cdot q$.

19. n pozitif tamsayısının tek bir asal böleni ve tam 13 tane pozitif böleni bulunursa, n' nin bir tamsayının küpü olduğunu gösteriniz.

    Çözüm: $n = p^{12} \Rightarrow n = (p^4)^3$.

20. Aşağıdakileri gösteriniz: $(n,\, n+1) = 1$; $(2n-1,\, 2n+1) = 1$; $(2n,\, 2n+2) = 2$; $(5a+3b,\, 13a+8b) = (a,\, b)$.

    Çözüm: $(n,\, n+1) = (n,\, 1) = 1$; $(2n-1,\, 2n+1) = (2n-1,\, 2) = 1$; $(2n,\, 2n-2) = (2n,\, 2) = 2$; $(5a+3b,\, 13a+8b) = (5a+3b,\, 3a+2b) = (2a+b,\, 3a+2b) = (2a+b,\, a+b) = (a,\, a+b) = (a,\, b)$.

21. x^3-3 sayısı $x-3$' e bölünecek şekilde kaç tane $x \neq 3$ tamsayısı bulunur?

    Çözüm: $x^3-3 = (x-3)(x^2+3x+9)+24 \Rightarrow (x-3) \mid 24 \Rightarrow$ 24'ün tam bölenlerinin sayısı kadar çözüm bulunur. $24 = 2^3 \cdot 3 \Rightarrow 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$.

22. Her n tamsayısı için $[2n+3,\, n+7]$' yi bulunuz.

    Çözüm: 7. sorudan dolayı,

    $$[2n+3,\, n+7] = \begin{cases} \dfrac{(2n+3)(n+7)}{11}, & n \equiv 4 \pmod{11}; \\ (2n+3)(n+7), & n \not\equiv 4 \pmod{11}. \end{cases}$$

23. Her n tamsayısı için $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ kesrinin sadeleştirilemeyeceğini gösteriniz.

    Çözüm: $(21n+4,\, 14n+3) = (7n+1,\, 14n+3) = (7n+1,\, 1) = 1$.

24. $k > 1$ bir tamsayı ve $k \not\equiv 9 \pmod{17}$ ise, $2k-1$ ve $9k+4$ tamsayılarının en büyük ortak böleni kaçtır? **(5.13)**

    Çözüm: $(2k-1,\, 9k+4) = (2k-1,\, k+8) = (-17,\, k+8) = (17,\, k+8)$
    $= \begin{cases} 17, & 17 \mid (k+8); \\ 1, & 17 \nmid (k+8). \end{cases} = \begin{cases} 17, & k \equiv 9 \pmod{17}; \\ 1, & k \not\equiv 9 \pmod{11}. \end{cases}$

25. Basamaklarının yeri değiştirildiğinde 4,5 katına çıkan iki basamaklı sayıyı bulunuz.

    Çözüm: $(yx) = 4,5 \cdot (xy) \Rightarrow 20y + 2x = 90x + 9y \Rightarrow 88x = 11y$
    $\Rightarrow y = 8x \Rightarrow x = 1;\ y = 8 \Rightarrow (xy) = 18$.

26. 2004! sayısı kaç sıfırla biter?

    Çözüm: $\left[\!\left[\dfrac{2004}{5}\right]\!\right] = 400$; $\left[\!\left[\dfrac{400}{5}\right]\!\right] = 80$; $\left[\!\left[\dfrac{80}{5}\right]\!\right] = 16$; $\left[\!\left[\dfrac{16}{5}\right]\!\right] = 3$
    $\Rightarrow 400 + 80 + 16 + 3 = 499$.

27. 1' den n' e kadar olan pozitif tamsayıların toplamı 26' ya bölünüyorsa, n en az kaç olur?

Çözüm: $26 \mid \dfrac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 52 \mid n(n+1) \Rightarrow$ en küçük $n = 12$.

28. $x \cdot y = 4(y^2 + x)$ eşitliğini sağlayan kaç tane $(x,\, y)$ tamsayı ikilisi vardır?

Çözüm: $x = \dfrac{4y^2}{y-4} = 4y + 16 + \dfrac{64}{y-4} \Rightarrow (y-4) \mid 64 = 2^6 \Rightarrow$
64'ün tam bölenlerinin sayısı kadar, yani $2 \cdot 7 = 14$ çözüm bulunur.

29. $xy = x + y$ eşitliğini sağlayan $(x,\, y)$ tamsayı ikililerini bulunuz.

Çözüm: $y = \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1} \Rightarrow x - 1 = \pm 1 \Rightarrow x = 0$ veya
$x = 2 \Rightarrow y = 2$ ve ya $y = 0 \Rightarrow (0,2); (2,0)$.

30. 2004 sayısı kaç yolla birkaç ardışık pozitif tamsayının toplamı şeklinde gösterilebilir?

Çözüm: 10. sorudaki gibi $k \cdot (2n + k + 1) = 2 \cdot 2004 = 2^3 \cdot 501$. k ve $2n + k + 1$ sayılarından biri çift, diğeri tek ve $k < 2n + k + 1$'dir. $\Rightarrow k = 8$; $2n + k + 1 = 501 \Rightarrow$ Tek yolla.